Isomorphie et équivalence – sur l'évolution de la notion de structure mathématique au cours du vingtième siècle

Clemens Berger

PhilMathMed
Laboratoire J. A. Dieudonné, 25 mai 2023

$\mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha - \pi\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$

Problème (Russell 1900)

Soit X l'ensemble de tous les ensembles Y ayant la propriété $P : Y \notin Y$. Question: est-ce que $X \in X$ ou $X \notin X$?

Définition

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une *bijection* $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Preuve.

Pour une application $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ soit $Y \subset X$ la partie $\{x \in X \,|\, x \notin \phi(x)\}$. Alors Y n'appartient pas à l'image de ϕ, donc ϕ n'est ni surjective ni (à plus forte raison) bijective. □

Problème (Russell 1900)

Soit X l'ensemble de tous les ensembles Y ayant la propriété $P : Y \notin Y$. Question: est-ce que $X \in X$ ou $X \notin X$?

Définition

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une *bijection* $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Preuve.

Pour une application $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ soit $Y \subset X$ la partie $\{x \in X \mid x \notin \phi(x)\}$. Alors Y n'appartient pas à l'image de ϕ, donc ϕ n'est ni surjective ni (à plus forte raison) bijective. $\square$

Problème (Russell 1900)

Soit X l'ensemble de tous les ensembles Y ayant la propriété $P : Y \notin Y$. Question: est-ce que $X \in X$ ou $X \notin X$?

Définition

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une *bijection* $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Preuve.

Pour une application $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ soit $Y \subset X$ la partie $\{x \in X \mid x \notin \phi(x)\}$. Alors Y n'appartient pas à l'image de ϕ, donc ϕ n'est ni surjective ni (à plus forte raison) bijective. $\square$

Problème (Russell 1900)

Soit X l'ensemble de tous les ensembles Y ayant la propriété $P : Y \notin Y$. Question: est-ce que $X \in X$ ou $X \notin X$?

Définition

X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une *bijection* $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Preuve.

Pour une application $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ soit $Y \subset X$ la partie $\{x \in X \mid x \notin \phi(x)\}$. Alors Y n'appartient pas à l'image de ϕ, donc ϕ n'est ni surjective ni (à plus forte raison) bijective. $\square$

Problème (Russell 1900)

Soit X l'ensemble de tous les ensembles Y ayant la propriété $P : Y \notin Y$. Question: est-ce que $X \in X$ ou $X \notin X$?

Définition

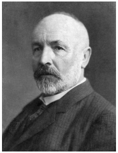
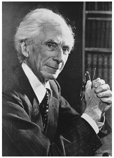
X et Y ont même *cardinalité* s'il existe une *bijection* $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Théorème (Cantor 1891)

X et son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ n'ont pas la même cardinalité. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même cardinalité.

Preuve.

Pour une application $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ soit $Y \subset X$ la partie $\{x \in X \,|\, x \notin \phi(x)\}$. Alors Y n'appartient pas à l'image de ϕ, donc ϕ n'est ni surjective ni (à plus forte raison) bijective. $\square$

Georg Cantor 1845-1918   Bertrand Russell 1872-1970

GC:"... Cardinalzahl einer Menge M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird ... Beiträge sur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1895.

BR:"... Tout le problème de ce monde est que les idiots et les fanatiques sont toujours si sûrs d'eux, tandis que les sages sont tellement pleins de doutes ..."

"Pour un écrivain scientifique il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mis une lettre de M. Bertrand Russell alors que le présent volume allait paraître." Gottlieb Frege 1902

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

Not(at)ions (popularisées ou introduites par Bourbaki)

- quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)
- ensemble vide $\emptyset$
- connecteurs logiques $\implies$, $\iff$
- produit tensoriel $\otimes$
- filtres, filtres de Cauchy, ultrafiltres

Définition (une application $f : X \to Y$ est ...)

- *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- *surjective* si $\forall y \in Y \, \exists x \in X$ tq. $f(x) = y$
- *bijective* si elle est à la fois *injective* et *surjective*.

N. Bourbaki 1935-1968 A. Grothendieck 1928-2014

H. Cartan, R. de Possel, *J. A. Dieudonné*, A. Weil, L. Olivier; T. Mirles, C. Chevalley, S. Mandelbrojt.

"En résumé, nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leur propres erreurs et d'en voir leur propre science enrichie, non appauvrie; cela leur donne le droit d'envisager leur avenir avec sérénité."
Bourbaki, Introduction à la Théorie des Ensembles (édition 1970).

"Mon identfication à ce milieu a été très forte ... c'était le premier groupe, au-delà du groupe familial, où j'ai été accueilli avec chaleur, et accepté comme un des leurs. Autre lien, d'une autre nature : ma propre approche des mathématiques trouvait confirmation dans celle du groupe, et dans celle des membres de mon nouveau milieu. Elle n'était pas identique à l'approche "bourbachique", mais il était clair que les deux étaient frères."

Grothendieck, Récoltes et Semailles 1981, pg. 161.

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, rightsquigarrow, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Définition (Eilenberg-Mac Lane 1945)

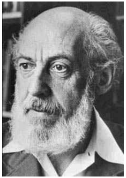
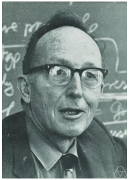
Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est donnée par une *classe* d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

- pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ un *ensemble* de morphismes $\mathcal{C}(A, B) = \{f : A \to B\}$ tels que
  1. l'ensemble $\mathcal{C}(A, A)$ possède une "identité" $1_A : A \to A$
  2. on dispose d'une composition associative et unitaire $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à un objet A de $\mathcal{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et applique $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$ de sorte que

1. $F(1_A) = 1_{FA}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, squiggly, "F"] & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

Samuel Eilenberg 1913-1998   Saunders MacLane 1909-2005

"In a metamathematical sense our theory provides concepts applicable to all branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides opportunities for the comparison of constructions and of isomorphisms occurring in different branches of mathematics; *in this way it may occasionally suggest new results by analogy*."

"This may be considered as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings."

"... it should be observed first that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one; our basic concepts are essentially those of a functor and a natural transformation."

Eilenberg-Mac Lane, General theory of natural equivalences 1945.

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- *Ens* = la catégorie des ensembles et applications
- *Gr* = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- *Top* = la catégorie des espaces et applications continues
- *Ann* = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans *Ens*, *Gr*, *Top*, *Ann*
- épi=morphisme surjectif dans *Ens*, *Gr*
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans *Top* ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans *Ann* !

Exemples (catégories)

- Ens = la catégorie des ensembles et applications
- Gr = la catégorie des groupes et morphismes de groupes
- Top = la catégorie des espaces et applications continues
- Ann = la catégorie des anneaux et morphismes d'anneaux

Définition (un morphisme $f : X \to Y$ est un ...)

- *mono* si pour tous $h, k : X' \rightrightarrows X : f \circ h = f \circ k \implies h = k$.
- *épi* si pour tous $h, k : Y \rightrightarrows Y' : h \circ f = k \circ f \implies h = k$.
- *iso* s'il existe $g : Y \to X$ tq. $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

- mono=morphisme injectif dans Ens, Gr, Top, Ann
- épi=morphisme surjectif dans Ens, Gr
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est épi dans Top ! $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est épi dans Ann !

Exemple (foncteur “sommets” $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{\textit{polytopes convexes}\}; \mathrm{MorPoly} = \{\textit{isométries affines}\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P,P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T,T) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C,C) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1,*) \to (X,*)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1,*) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2,*) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}; \mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P, P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T, T) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C, C) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3, 4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2, *) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" S : $\mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}$; $\mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P,P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T,T) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C,C) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur π_1 : $Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1,*) \to (X,*)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1,*) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2,*) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}$; $\mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P,P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T,T) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C,C) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1,*) \to (X,*)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1,*) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2,*) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur “sommets” $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}$; $\mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P, P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T, T) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C, C) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3, 4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(D^2, *) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{\textit{polytopes convexes}\}; \mathrm{MorPoly} = \{\textit{isométries affines}\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P,P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T,T) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C,C) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1,*) \to (X,*)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1,*) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2,*) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}$; $\mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P,P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T,T) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C,C) \to \mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1,*) \to (X,*)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1,*) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2,*) = 0.$$

Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Exemple (foncteur "sommets" $S : \mathrm{Poly} \to \mathrm{Ens}$)

$\mathrm{ObPoly} := \{$*polytopes convexes*$\}$; $\mathrm{MorPoly} = \{$*isométries affines*$\}$
Une isométrie $f : P \to Q$ induit une bijection $S(f) : S(P) \to S(Q)$.
D'où des applications $S(\mathrm{Iso}(P, P)) \to \mathrm{Bij}(S(P), S(P))$, par exemple pour un triangle T, resp. un carré C équilatéral

$$\mathrm{Iso}(T, T) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3\}), \text{ resp. } \mathrm{Iso}(C, C) \to \mathrm{Bij}(\{1, 2, 3, 4\})$$

le premier étant un iso de groupes, le second un mono de groupes.

Exemple (foncteur $\pi_1 : Top_* \to Gr$, Poincaré 1895)

Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, *)$ est l'ensemble des applications continues $(S^1, *) \to (X, *)$ quotienté par la relation d'homotopie.

$$\pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(D^2, *) = 0.$$

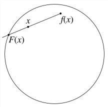
Un foncteur préserve les iso, mais en général ni les mono ni les épi.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe existait, alors D^2 se rétracterait via F sur S^1, ce qui est impossible.



$\square$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F \circ i = 1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, rightsquigarrow, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F \circ i) = \pi_1(F) \circ \pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D^2) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Remarque (logique classique vs logique intuitioniste)

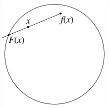
La preuve repose sur le principe du tiers exclus, valable en logique classique, mais pas en logique intuitioniste.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe existait, alors D^2 se rétracterait via F sur S^1, ce qui est impossible.



$\square$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i = 1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}}=\pi_1(F\circ i)=\pi_1(F)\circ\pi_1(i)=0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D^2) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Remarque (logique classique vs logique intuitioniste)

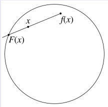
La preuve repose sur le principe du tiers exclus, valable en logique classique, mais pas en logique intuitioniste.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe existait, alors D^2 se rétracterait via F sur S^1, ce qui est impossible.



$\square$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F \circ i = 1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}} = \pi_1(F \circ i) = \pi_1(F) \circ \pi_1(i) = 0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D^2) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Remarque (logique classique vs logique intuitioniste)

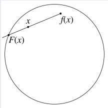
La preuve repose sur le principe du tiers exclus, valable en logique classique, mais pas en logique intuitioniste.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe existait, alors D^2 se rétracterait via F sur S^1, ce qui est impossible. $\square$



$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i=1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}}=\pi_1(F\circ i)=\pi_1(F)\circ\pi_1(i)=0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D^2) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

Remarque (logique classique vs logique intuitioniste)

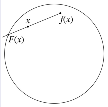
La preuve repose sur le principe du tiers exclus, valable en logique classique, mais pas en logique intuitioniste.

Théorème (Brouwer 1912)

Toute fonction continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Preuve.

Si une fonction continue $f : D^2 \to D^2$ sans point fixe existait, alors D^2 se rétracterait via F sur S^1, ce qui est impossible.



$\square$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i=1_{S^1}"'] & D^2 \arrow[r, "F"] & S^1 \arrow[r, squiggly, "\pi_1(-)"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "\pi_1(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathbb{Z}}=\pi_1(F\circ i)=\pi_1(F)\circ\pi_1(i)=0_{\mathbb{Z}}"'] & \pi_1(D^2) \arrow[r, "\pi_1(F)"] & \pi_1(S^1) \end{tikzcd}$$

Remarque (logique classique vs logique intuitioniste)

La preuve repose sur le principe du tiers exclus, valable en logique classique, mais pas en logique intuitioniste.

Henri Poincaré 1854-1912   Luitzen Brouwer 1881-1966

"... La logique, qui peut seule donner la certitude, est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention." Poincaré, La valeur de la science 1905.
"... la croyance à la continuité, croyance qu'il serait difficile de justifier par un raisonnement apodictique, mais sans laquelle toute science serait impossible." Poincaré, La science et l'hypothèse 1908.

"... à une transformation biunivoque et continue de la sphère on peut attribuer un nombre fini *n* comme son *degré*. En partant d'une transformation de degré *n* on peut atteindre moyennant des transformations continues toute autre transformation de degré *n*, mais pas d'autres". Brouwer, Oeuvres complètes II, pg. 426. 1911

"Si on veut remonter à l'origine de l'intuition qu'on a des nombres il faut revenir à l'intuition qu'on a du temps."

Définition (homotopie)

Une homotopie H entre fonctions continues $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une fonction continue $H_t : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. On note $f \sim g$. C'est une relation d'équivalence.

Définition (équivalence d'homotopie)

$f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Exemples

Le disque épointé $D^2 - \{(0,0)\}$ est h-équivalent au cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ moins n points est h-équivalent à un bouquet de n cercles.

Remarque (la classification des types d'homotopie d'espaces ...)

est un domaine de recherche inépuisable. Les classes d'homotopie d'applications continues $S^m \to S^n$ pour $m >> n$ sont inconnues.

Définition (homotopie)

Une homotopie H entre fonctions continues $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une fonction continue $H_t : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. On note $f \sim g$. C'est une relation d'équivalence.

Définition (équivalence d'homotopie)

$f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Exemples

Le disque épointé $D^2 - \{(0,0)\}$ est h-équivalent au cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ moins n points est h-équivalent à un bouquet de n cercles.

Remarque (la classification des types d'homotopie d'espaces ...)

est un domaine de recherche inépuisable. Les classes d'homotopie d'applications continues $S^m \to S^n$ pour $m >> n$ sont inconnues.

Définition (homotopie)

Une homotopie H entre fonctions continues $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une fonction continue $H_t : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. On note $f \sim g$. C'est une relation d'équivalence.

Définition (équivalence d'homotopie)

$f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Exemples

Le disque épointé $D^2 - \{(0,0)\}$ est h-équivalent au cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ moins n points est h-équivalent à un bouquet de n cercles.

Remarque (la classification des types d'homotopie d'espaces ...)

est un domaine de recherche inépuisable. Les classes d'homotopie d'applications continues $S^m \to S^n$ pour $m >> n$ sont inconnues.

Définition (homotopie)

Une homotopie H entre fonctions continues $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une fonction continue $H_t : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. On note $f \sim g$. C'est une relation d'équivalence.

Définition (équivalence d'homotopie)

$f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Exemples

Le disque épointé $D^2 - \{(0,0)\}$ est h-équivalent au cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ moins n points est h-équivalent à un bouquet de n cercles.

Remarque (la classification des types d'homotopie d'espaces ...)

est un domaine de recherche inépuisable. Les classes d'homotopie d'applications continues $S^m \to S^n$ pour $m >> n$ sont inconnues.

Définition (homotopie)

Une homotopie H entre fonctions continues $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une fonction continue $H_t : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. On note $f \sim g$. C'est une relation d'équivalence.

Définition (équivalence d'homotopie)

$f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Exemples

Le disque épointé $D^2 - \{(0, 0)\}$ est h-équivalent au cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ moins n points est h-équivalent à un bouquet de n cercles.

Remarque (la classification des types d'homotopie d'espaces ...)

est un domaine de recherche inépuisable. Les classes d'homotopie d'applications continues $S^m \to S^n$ pour $m >> n$ sont inconnues.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_0(A) \to F_1(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(f)"] \\ F_0(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_1(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_0 et F_1 sont *isomorphes* : $F_0 \cong F_1$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_0(A) \to F_1(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(f)"] \\ F_0(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_1(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_0 et F_1 sont *isomorphes* : $F_0 \cong F_1$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_0(A) \to F_1(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(f)"] \\ F_0(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_1(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_0 et F_1 sont *isomorphes* : $F_0 \cong F_1$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$.

Soient $\mathcal{C} \underset{F_1}{\overset{F_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ deux foncteurs ayant mêmes source et but.

Définition (une transformation naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$)

est la donnée, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'un $\phi_A : F_0(A) \to F_1(A)$, tel que pour tout $f : A \to B$ on ait le diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(f)"] \\ F_0(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & F_1(B) \end{tikzcd}$$

Si ϕ est *inversible*, on dit que F_0 et F_1 sont *isomorphes* : $F_0 \cong F_1$.

Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie $[1]$ ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie $[1]$ ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie [1] ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie $[1]$ ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie [1] ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Remarque

- Une transf. naturelle $\phi : F_0 \Rightarrow F_1$ est aussi donnée par un foncteur $H_t : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$ tel que $H_0 = F_0$ et $H_1 = F_1$, la catégorie $[1]$ ayant deux objects $0, 1$ et un morphisme $0 \to 1$.
- Si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ alors les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ sont en correspondance biunivoque, mais pas les objects!

Théorème (Beck 1967)

Si un foncteur oubli $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ admet un foncteur libre $\mathcal{L} : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}$ ayant certaines propriétés alors la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade $\mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.

Exemples (catégories monadiques)

Les groupes, les anneaux, les modules sur un anneau, les espaces compacts (via les ultrafiltres) vérifient ces propriétés.

Dan Quillen 1940-2011   William Lawvere 1937-2023

"Part I raises some interesting questions ... in order to answer these questions we introduced the notion of model category, which is short for a 'category of models for a homotopy theory'. A model category is a category endowed with three families of maps called cofibrations, weak equivalences and fibrations satisfying certain axioms. To a model category $\mathcal{C}$ is associated a homotopy category $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ (obtained by localizing with respect to the family of weak equivalences) and extra structure on $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ such as suspension functors and loop functors."

Quillen, Rational homotopy theory, 1969.

"... Thus we seem to have partially demonstrated that even in foundations, not substance but invariant form is the carrier of the relevant mathematical information."

Lawvere, An elementary theory of the category of sets, 1964.

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?

Conclusion

- Le langage des catégories permet un traitement dynamique des objets structurés. Les foncteurs formalisent des constructions qui modifient une structure.
- La notion d'équivalence de catégories identifie des structures ayant une expressivité similaire.

Les défis mathématiques de notre siècle

- formalisation syntaxique du langage mathématique (Homotopy Type Theory, Vladimir Voevodsky 2009)
- assistants de preuve (langage Coq, Thierry Coquand 1989)
- intelligence artificielle (AlphaZero pour le jeu d'échecs, 2017)

Y a-t-il une structure sous-jacente ? Quelle est la place pour l'inventivité humaine ?