STRUCTURES CELLULAIRES EN THÉORIE D'HOMOTOPIE

Mémoire d'Habilitation

de

Clemens BERGER

Soutenu le 26 novembre 2001
au Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis
devant le jury :

André JOYAL, Professeur d'Université, Montréal (rapporteur)

Jean-Michel LEMAIRE, Professeur d'Université, Nice (président)

Jean-Louis LODAY, Directeur de Recherche, Strasbourg (rapporteur)

Francis SERGERAERT, Professeur d'Université, Grenoble (examinateur)

Carlos SIMPSON, Directeur de Recherche, Nice (examinateur)

Rainer VOGT, Professeur d'Université, Osnabrück (rapporteur)

Je voudrais tout d'abord remercier les membres du jury d'être venus de loin ou de près pour assister à la soutenance. Un grand merci aux rapporteurs pour la rapidité avec laquelle ils se sont exprimés sur ce mémoire.

J'ai eu la chance de trouver à Nice un laboratoire en plein essor, situé dans un des plus beaux campus de France. C'est un plaisir d'y travailler grâce également à un personnel d'une compétence et d'une gentillesse exceptionnelles.

Ces dernières années, les équipes de topologie algébrique et de géométrie projective se sont rapprochées. Cela me réjouit d'autant plus que j'y ai contribué un tant soit peu. Un grand merci à tous nos topologues et géomètres pour les maintes discussions que j'ai pu avoir avec l'un ou avec l'autre.

Le mathématicien a parfois tendance à s'enfermer sur lui-même : la communication devient alors difficile, par moments délicate. C'est pour cela que les instants de vrai dialogue sont précieux : j'en ai eu plusieurs et j'aimerais en remercier Zig Fiedorowicz, Misha Batanin et Benoît Fresse.

La recherche scientifique reste ancrée dans la vie de tous les jours qui seule est capable de lui donner un sens et une limite. C'est aux deux êtres qui me sont les plus chers et les plus proches que je dédie ce mémoire.

A Hélène et Marina

Introduction

Depuis ses premiers jours la structure simpliciale apparaît comme étant à mi-chemin entre topologie et algèbre : elle emprunte à la première son aspect géométrique et à la seconde son aspect équationnel. Le passage de l'un à l'autre s'effectue en quotientant par la relation d'homotopie. Le point de départ de ma recherche a précisément été l'étude de la relation d'homotopie dans le contexte simplicial. Au fil des ans, cette approche constructive est devenue de plus en plus abstraite. Heureusement, l'abstraction même poussée m'a à chaque fois ramené à l'intuition géométrique, source inépuisable de toute recherche mathématique.

Ce mémoire décrit dans l'ordre chronologique les résultats de ma recherche durant la période 1991-2001. Seront également mentionnés quelques problèmes restés ouverts auxquels je compte revenir ultérieurement.

Le premier chapitre traite la construction centrale de ma thèse : un groupoïde de chemins fonctoriel pour les ensembles simpliciaux. Cette construction fournit une interprétation géométrique de la construction G de Kan, tout en évitant la restriction de celle-ci aux ensembles simpliciaux réduits. Ce chapitre contient également l'étude de la construction adjointe $\overline{\mathrm{W}}$ telle qu'elle apparaît dans un travail en commun avec Johannes Huebschmann. À la fin du chapitre, une nouvelle paire de foncteurs adjoints est discutée reliant la théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux à celle des groupoïdes simplicialement enrichis.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude combinatoire des opérades de type E_n. Grâce à une cellularisation de l'opérade des petits n-cubes de Boardman et Vogt, plusieurs modèles combinatoires d'opérades de type E_n sont présentés. L'outil de base est une E_∞-opérade partiellement ordonnée $\mathcal{K}$ qui est filtrée par des sous-opérades $\mathcal{K}_n$ de type E_n. Cette opérade a une propriété universelle qui permet de munir un grand nombre de E_∞-opérades connues d'une cellularisation subordonnée à $\mathcal{K}$. En particulier, la filtration de Jeff Smith de l'opérade de Barratt-Eccles s'obtient par une telle cellularisation ce qui montre que c'est une filtration par des sous-opérades de type E_n. Ce résultat-clé a des applications intéressantes traitées dans les chapitres trois et quatre. Il est à noter que la sous-opérade de $\mathcal{K}_n$ formée par les éléments "décomposables" s'identifie à l'opérade $\mathcal{M}_n$ introduite par Balteanu, Fiedorowicz, Schwänzl et Vogt pour définir les catégories monoïdales n-fois itérées.

Le troisième chapitre traite quelques aspects de la théorie des catégories supérieures. La première partie établit que le nerf simplicial d'une catégorie monoïdale tressée est à complétion en groupe près un espace de lacets doubles. Ce résultat est dû à Fiedorowicz. Notre preuve est différente en ce qu'elle utilise le deuxième étage de la filtration de l'opérade de Barratt-Eccles. Une catégorie monoïdale tressée peut être considérée (par décalage) comme une 3-catégorie faible, connue en littérature sous le nom de catégorie de Gray ou 3-catégorie semi-stricte. Nous construisons un nerf simplicial pour les 3-catégories semi-strictes et en déduisons que les 3-groupoïdes semi-stricts modélisent tous les 3-types topologiques. C'est la première preuve publiée de ce résultat annoncé par Joyal, Tierney et Leroy.

La deuxième partie contient la construction et l'étude d'un nerf pour une grande famille de ω-catégories faibles, à savoir toutes celles qui sont des algèbres sur une ω-opérade au sens de Batanin. En particulier, les ω-catégories strictes admettent un nerf cellulaire qui généralise le nerf simplicial d'une catégorie. Il en résulte un plongement pleinement fidèle de la catégorie des ω-catégories dans une catégorie de préfaisceaux d'ensembles. La catégorie d'opérateurs n'est autre que la catégorie cellulaire Θ de Joyal. Nous montrons que les ensembles cellulaires portent une structure de modèles au sens de Quillen avec une théorie d'homotopie équivalente à la théorie d'homotopie des espaces. Cependant, l'adjoint à gauche du nerf cellulaire ne préserve pas le type d'homotopie, ce qui indique que la théorie d'homotopie des ω-catégories est intrinsèquement plus difficile que celle des ensembles cellulaires. Cette difficulté est contournée en ajoutant un paramètre simplicial. La même technique permet de développer une théorie d'homotopie pour les ω-catégories faibles de Batanin. Enfin, à l'aide d'une extension de Kan "homotopique", les théories d'homotopie des ω-catégories faibles et strictes sont comparées.

Le quatrième chapitre présente un travail en commun avec Benoît Fresse dont le résultat principal est la construction d'une structure E_∞ explicite sur l'algèbre des cochaînes d'un espace. Comme corollaire, nous obtenons une preuve élémentaire d'une conjecture de Deligne. Ce sont les chaînes de l'opérade de Barratt-Eccles qui agissent sur les cochaînes d'un espace. L'action se factorise par une opérade-quotient. Il s'avère que le passage au quotient est une équivalence faible d'opérades filtrées. Selon McClure et Smith, le deuxième étage de la filtration de l'opérade-quotient agit sur les cochaînes de Hochschild d'une algèbre associative. Ceci, joint à notre caractérisation de la filtration de l'opérade de Barratt-Eccles, démontre la conjecture de Deligne.

Table des matières

1 Un groupoïde de chemins simplicial

La notion d'objet de chemins est duale de celle d'objet-cylindre et se formule le plus aisément dans le cadre des catégories de modèles fermées de Quillen [40].

1.1. *Catégories de modèles fermées et objets de chemins.*

Une *catégorie de modèles fermée* est une catégorie ayant des limites finies, des colimites finies ainsi que trois classes distinguées de morphismes (appelés cofibrations, équivalences faibles et fibrations) vérifiant quatre axiomes [40]. La donnée de deux parmi ces trois classes détermine complètement la troisième. La catégorie Top des espaces topologiques est une catégorie de modèles fermée ayant comme équivalences faibles les équivalences d'homotopie faibles et comme fibrations les fibrations de Serre.

Un *objet de chemins* X^I au-dessus de X est donnée par une factorisation de la diagonale $X \overset{\sim}{\longrightarrow} X^I \twoheadrightarrow X \times X$ en une équivalence faible suivie d'une fibration. Rappelons que Δ désigne la catégorie des ordinaux finis $[n]$, $n \geq 0$. Un ensemble simplicial est un préfaisceau d'ensembles sur Δ. La catégorie des ensembles simpliciaux est une catégorie de modèles fermée ayant comme cofibrations les monomorphismes et comme équivalences faibles les morphismes dont la réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie.

L'interval standard $\Delta[1] = \Delta(-,[1])$ définit pour tout ensemble simplicial X un objet-cylindre $X \sqcup X \rightarrowtail X \times \Delta[1] \overset{\sim}{\longrightarrow} X$. Par contre, l'objet fonctionnel $X^{\Delta[1]}$ définit un objet de chemins $X \overset{\sim}{\longrightarrow} X^{\Delta[1]} \twoheadrightarrow X \times X$ seulement si X est fibrant, i.e. si l'unique morphisme $X \to \Delta[0]$ est une fibration. Cette condition a été introduite par Kan et est souvent appelée condition de Kan.

La motivation pour définir un objet de chemins fonctoriel pour tous les ensembles simpliciaux provient d'un théorème de Kan [32] établissant l'équivalence entre la théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux réduits et la théorie d'homotopie des groupes simpliciaux. La preuve initiale [31] de cette équivalence repose sur le théorème de Whitehead. Plus précisément, Kan définit pour tout ensemble simplicial réduit X un fibré principal $\mathrm{G}X \to \mathrm{E}X \twoheadrightarrow X$ et montre que l'espace total de ce fibré est simplement connexe et acyclique, donc *contractile*. Pour rendre l'équivalence des deux théories d'homotopie *constructive*, il faut entre autre trouver une preuve directe de la contractibilité de $\mathrm{E}X$ qui évite le recours au théorème de Whitehead. C'est précisément cela que fournit l'objet de chemins dont la construction est rappelée ci-dessous.

1.2. *Un groupoïde de chemins simplicial. [3, 1.2a]*

Pour tout ensemble simplicial X, une famille de graphes $\Xi_n \overset{(e,s)}{\to} X_n \times X_n$ est définie en posant $\Xi_n = (X_{n+1})^{n+1} = \{[\xi, i] \,|\, \xi \in X_{n+1},\, 0 \leq i \leq n\}$ et $(e,s)([\xi,i]) = (\partial_{i+1}\xi, \partial_i\xi)$. L'ensemble $(X^I)_n$ des n-simplexes de X^I est alors défini comme le *groupoïde libre* engendré par le graphe $(e,s) : \Xi_n \to X_n \times X_n$ en identifiant tous les éléments de la forme $[s_i x, i]$, $0 \leq i \leq n$, à l'identité au-dessus de x. La structure simpliciale est définie en considérant un élément $[\xi, i]$ comme un n-simplexe de chemins linéaires reliant les points de $\partial_{i+1}\xi$ aux points de $\partial_i\xi$.

Proposition 1.3. *[3, 1.3, 1.8 et 2.5]*

Le groupoïde simplicial $X \xrightarrow{i_X} X^I \xrightarrow{(e_X,s_X)} X\times X$ *est un objet de chemins pour la catégorie des ensembles simpliciaux. Il est muni d'un morphisme simplicial* $\rho_X : X^I \to (X^I)^I$ *qui déforme l'identité de* X^I *en* $i_X \circ s_X$ *relativement à* X.

Dans un article récent [30], Joyal et Tierney étudient le problème quand un groupoïde simplicial forme un objet de chemins et comment en construire. Leur critère [30, thm. 7] montre aisément que $(e_X, s_X) : X^I \to X \times X$ est une fibration. Le fait que $i_X : X \to X^I$ est une équivalence faible résulte de [3, 1.8].

Théorème 1.4. *[3, 3.3]*

La fibration de chemins $\Omega X \to \mathrm{P}X \twoheadrightarrow X$ *définie par l'objet de chemins* X^I *contient de manière canonique le fibré de Kan* $\mathrm{G}X \to \mathrm{E}X \twoheadrightarrow X$ *de sorte que la contraction* $\rho_X|_{PX}$ *de* PX *induise une contraction* $\rho_X|_{\mathrm{E}X} : \mathrm{E}X \to (\mathrm{E}X)^I$ *de l'espace total du fibré de Kan.*

La première partie de ce théorème est formelle et découle de la *propriété universelle* du fibré de Kan. En effet, tout H-fibré principal $H \to E \twoheadrightarrow X$ est induit par le fibré de Kan via un changement de groupe structural *unique* $\mathrm{G}X \to H$ dès lors qu'on fixe une structure de H-fibré $X \times_t H$ sur E par le choix d'une fonction de torsion $t : X \to H$. Toute H-fibration principale admet une telle fonction de torsion. Il suffit donc de l'expliciter dans le cas de notre fibration de chemins, ce qui se fait de manière naturelle, cf. [3, 3.3a]. La seconde partie est plus surprenante et reflète l'interpretation géométrique que Kan donne lui-même de son fibré co-universel [31]. Il est à noter que Waldhausen reprend dans une note récente [50] la construction de Kan et démontre également de manière combinatoire la contractibilité de l'espace total.

Nous désignons par S^n la n-sphère simpliciale standard $\Delta[n]/\partial\Delta[n]$.

Proposition 1.5. *[3, 2.6]*

Tout cycle de Moore $\omega : \mathrm{S}^n \to \Omega X$ *admet un représentant simplicial adjoint* $\hat\omega : \Sigma^{n+1}(\omega) \to X$ *tel que la classe* $[|\hat\omega|] \in \pi_{n+1}(|X|)$ *correspond à* $[\omega] \in \pi_n(\Omega X)$ *via l'isomorphisme connectant et tel que le cycle fondamental de la* $(n+1)$*-sphère* $\Sigma^{n+1}(\omega)$ *est composé d'autant d'éléments que le cycle de Moore* $\omega \in (\Omega X)_n$.

Cette proposition s'applique également aux cycles de Moore $g : \mathrm{S}^n \to \mathrm{G}X$ en composant avec le changement de groupe structural $\mathrm{G}X \to \Omega X$. Ceci augmente en général la longueur du cycle, car un générateur du groupe libre $(\mathrm{G}X)_n$ correspond à un produit de générateurs du groupe libre $(\Omega X)_n$. Comme exemple-type, nous considérons dans [3, 3.4] le 2-cycle

$$s_0\bar\sigma \cdot s_1\bar\sigma \cdot s_0\bar\sigma^{-1} \cdot s_1\bar\sigma^{-1} \in (\mathrm{GS}^2)_2$$

où $\sigma \in (\mathrm{S}^2)_2$ désigne le simplexe fondamental de la 2-sphère. Kan montre [31] que la classe d'homotopie de ce commutateur engendre $\pi_2(\mathrm{GS}^2) \cong \pi_3(|\mathrm{S}^2|)$ et représente donc la fibration de Hopf. L'image dans $(\Omega\mathrm{S})_2$ s'écrit

$$\omega = [s_0\sigma, 2][s_1\sigma, 2][s_2\sigma, 1][s_0\sigma, 2]^{-1}[s_2\sigma, 1]^{-1}[s_1\sigma, 2]^{-1} \in (\Omega\mathrm{S}^2)_2.$$

D'après (1.5), il lui correspond un représentant adjoint $\hat{\omega} : \Sigma^3(\omega) \to \mathrm{S}^2$ avec une 3-sphère simpliciale $\Sigma^3(\omega)$ ayant un cycle fondamental composé de six 3-simplexes. Le cône simplicial du morphisme $\hat{\omega}$ fournit donc un "très petit" modèle simplicial du plan projectif complexe.

Depuis sa définition dans les années cinquante, le fibré de Kan a servi à maints endroits pour rendre explicites des constructions homotopiques dont on connaissait ou soupçonnait l'existence. C'est en quelque sorte la version simpliciale de la *construction cobar* d'Adams. Nous allons voir comment une étude plus approfondie du morphisme $\mathrm{G}X \to \Omega X$ permet de retrouver un théorème dû à Baues [16] selon lequel la construction cobar d'Adams $\Omega\mathrm{C}_*(X)$ du complexe des chaînes de X s'identifie aux chaînes cubiques d'un ensemble cubique $\Omega_B X$ dont la réalisation géométrique est faiblement équivalente à l'espace des lacets de $|X|$. Ceci démontre géométriquement que $\Omega\mathrm{C}_*(X)$ est homotopiquement équivalent à $\mathrm{C}_*(\Omega|X|)$. En outre, ces équivalences respectent les structures multiplicatives à homotopie près. L'observation fondamentale est la suivante :

1.6. *La structure cubique de la résolution de Godement des ordinaux finis.*

Le foncteur oubli qui associe à une catégorie le graphe réflexif sous-jacent est *monadique* et admet donc en particulier un adjoint à gauche. D'après Godement, cette adjonction induit pour toute catégorie $\mathcal{C}$ une résolution simpliciale $w\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, qui est constante sur les objets.

La résolution simpliciale de l'ordinal $[n+1]$ définit un isomorphisme simplicial $w[n+1](0, n+1) \cong \Delta[1]^n$. Les 0-simplexes correspondent aux factorisations $0 \to i_1 \to \cdots \to i_k \to n+1$, les simplexes de dimension supérieure correspondent aux suites de raffinement de 0-simplexes. L'isomorphisme se visualise le mieux en disant que $w[n+1](0, n+1)$ est le *nerf* de l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ordonnées par inclusion. Cet ensemble partiellement ordonné s'identifie à $[1]^n$. L'isomorphisme est fonctoriel en les opérateurs simpliciaux préservant les sommets extrémaux.

Baues définit une catégorie $\Omega\Delta$ dont les objets sont les *cordes simpliciales* $\Delta[n_1+1] \vee \cdots \vee \Delta[n_r+1]$ (recollés dans l'ordre selon leurs sommets extrémaux) et dont les morphismes sont les morphismes simpliciaux qui préservent les deux sommets extrémaux non recollés. En étendant la construction ci-dessus, on obtient un foncteur covariant $\Omega\Delta \to \mathrm{Ens}^{\Delta^{op}}$ appliquant $\Delta[n_1+1] \vee \cdots \vee \Delta[n_r+1]$ sur $\Delta[1]^{n_1+\cdots+n_r}$. Les cordes simpliciales d'un ensemble simplicial X définissent un foncteur contravariant $(\Omega\Delta)^{op} \to \mathrm{Ens}$. Le produit tensoriel de ces deux foncteurs définit la construction cobar de Baues $\Omega_B X$, qui est en fait un *monoïde simplicial*. Sa réalisation géométrique admet une cellularisation cubique. Les chaînes cubiques $\mathrm{C}_*^{cub}(\Omega_B X)$ forment un complexe de chaînes *isomorphe* à la construction cobar d'Adams $\Omega\mathrm{C}_*(X)$, cf. [16].

Proposition 1.7. *[3, 3.5]*

Pour tout ensemble simplicial réduit X, il existe un plongement canonique $\Omega_B X \hookrightarrow \Omega X$ qui se factorise à travers $\mathrm{G}X \to \Omega X$. Le plongement $\Omega_B X \hookrightarrow \mathrm{G}X$ est une complétion en groupe. En particulier, si X est 1-réduit, alors c'est une équivalence multiplicative faible.

Cette relation simple entre $\Omega_B X$ et $\mathrm{G}X$ n'est pas mentionnée explicitement dans [3], mais découle aisément d'une comparaison de [3, 3.3b] et de [3, 3.5c]. L'avantage du monoïde simplicial $\Omega_B X$ sur son complété en groupe $\mathrm{G}X$ est qu'il admet une cellularisation cubique et qu'il est de dimension finie, si X l'est. Baues en déduit une diagonale explicite pour la construction cobar d'Adams ce qui permet de l'itérer une fois. Dans la tentative de définir une construction analogue pour les ensembles cubiques afin d'itérer la construction cobar une deuxième fois, les *permutoèdres* apparaissent. En fait, $w[1]^n(0\cdots 0, 1\cdots 1)$ est la subdivision barycentrique du permutoèdre P_n. Cette subite apparition des groupes symétriques dans l'étude des espaces de lacets doubles a été déterminante pour moi et a suscité mon intérêt pour la théorie des opérades, cf. chapitre deux.

1.8. *Le fibré universel d'un groupe simplicial.*

Revenons à l'équivalence des théories d'homotopie des ensembles simpliciaux réduits et des groupes simpliciaux. Pour établir cette équivalence, il nous faut également une construction duale de la construction G. Dans la catégorie des ensembles simpliciaux, elle est caractérisée par la propriété universelle que tout H-fibré principal de base réduite X est induit via un changement de base *unique* $X \to \overline{\mathrm{W}}H$ par le H-fibré universel $H \to \mathrm{W}H \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{W}}H$. Chaque fonction de torsion $t : X \to H$ définit donc à la fois un morphisme de groupes $\mathrm{G}X \to H$ et un morphisme d'ensembles simpliciaux réduits $X \to \overline{\mathrm{W}}H$. Autrement dit, les foncteurs G et $\overline{\mathrm{W}}$ sont adjoints et la contractibilité de $\mathrm{E}X$ et de $\mathrm{W}H$ assure qu'ils induisent l'équivalence souhaitée entre les catégories homotopiques.

En vertu de sa propriété universelle, la construction duale $\overline{\mathrm{W}}H$ est un modèle de l'*espace classifiant* du groupe simplicial H. La construction habituelle de l'espace classifiant est la *construction bar* $\overline{\mathrm{B}}H$. Il est naturel de s'interroger sur la relation entre les H-fibrés principaux $\mathrm{W}H$ et $\mathrm{B}H$ associés. Les deux contructions ont des structures simpliciales différentes à moins que H ne soit discret. En effet, $\mathrm{B}H$ est la diagonale de l'ensemble bisimplicial $\cdots H^3 \rightrightarrows H^2 \to H$ tandisque $(\mathrm{W}H)_n$ est le produit $H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_n$. Il n'est donc pas évident de relier explicitement ces deux fibrés, même après réalisation géométrique. Cependant, un travail en commun avec Johannes Huebschmann contient le résultat suivant:

Théorème 1.9. *[6]*
Les $|H|$-fibrés principaux $|\mathrm{W}H|$ et $|\mathrm{B}H|$ sont homéomorphes de manière fonctorielle en H.

La preuve s'appuie sur une filtration parallèle des deux fibrés, définie en alternant une infinité dénombrable de fois la construction $(-) \times H$ et la construction du cône, en partant avec le singleton. La différence entre $\mathrm{W}H$ et $\mathrm{B}H$ réside dans le choix du cône $X \mapsto \mathrm{C}X$. Pour $\mathrm{W}H$ on choisit un cône "minimal" défini en ajoutant un $(n+1)$-simplexe au-dessus de chaque n-simplexe de X, pour $\mathrm{B}H$ on choisit le cône standard $\mathrm{C}X = X \times \Delta[1]/X \times (1)$. Après réalisation géométrique, les deux cônes sont homéomorphes, d'où l'énoncé.

Pour conclure ce chapitre, revenons à la résolution de Godement des ordinaux (1.6). Elle est fonctorielle si l'on considère $[n] \mapsto w[n]$ comme un foncteur à valeurs dans la catégorie s_0Cat des *catégories simplicialement enrichies*. L'extension de Kan à gauche définit alors une paire de foncteurs adjoints $\gamma : \mathrm{Ens}^{\Delta^{op}} \leftrightarrows s_0\mathrm{Cat} : \overline{\mathrm{W}}$. Les deux foncteurs mettent en correspondance bijective les 0-simplexes de l'ensemble simplicial et les objets de la catégorie associée. Les groupoïdes simplicialement enrichis forment une sous-catégorie réflexive s_0Gpd de s_0Cat. Nous désignerons par $\widehat{\gamma} : \mathrm{Ens}^{\Delta^{op}} \to s_0\mathrm{Gpd}$ le foncteur composé $\widehat{(-)} \circ \gamma$ où $\widehat{(-)} : s_0\mathrm{Cat} \to s_0\mathrm{Gpd}$ désigne la réflexion.

Théorème 1.10. *Les théories d'homotopie des ensembles simpliciaux et des groupoïdes simplicialement enrichis sont équivalentes via la paire* $(\widehat{\gamma}, \overline{\mathrm{W}})$.

En fait, il s'agit d'une équivalence de Quillen entre catégories de modèles fermées. Nous conjecturons que l'énoncé reste vrai en substituant aux groupoïdes les catégories simplicialement enrichies et qu'un analogue du théorème (1.9) relie la construction $\overline{\mathrm{W}}$ à un nerf bisimplicial. Il serait également intéressant de considérer une classe d'équivalences faibles plus petite que celle du théorème (1.10), à savoir les foncteurs simplicialement enrichis induisant des équivalences faibles *et* sur les hom internes *et* sur les catégories obtenues en appliquant π_0 aux hom internes. Cette classe d'équivalences faibles correspond exactement aux équivalences de catégories, i.e. aux foncteurs pleinement fidèles et essentiellement surjectifs. La preuve de (1.10) à été esquissée par Dwyer et Kan [22] à l'aide d'une autre paire de foncteurs adjoints. Notre paire a l'avantage de préserver les 0-cellules. Le *groupoïde fondamental* d'un ensemble simplicial X s'identifie au groupoïde obtenu en appliquant π_0 aux hom internes de $\hat{\gamma}X$.

Si l'ensemble simplicial X est réduit, alors γX ne contient qu'un seul objet et les endomorphismes de cet objet forment un monoïde simplicial isomorphe à la construction $\Omega_B X$ de Baues. Il découle alors de (1.7) que la complétion en groupe de ce monoïde est le groupe de lacets $\mathrm{G}X$ de Kan, qui s'identifie donc au groupe des automorphismes de l'unique objet de $\widehat{\gamma}X$. Autrement dit, la paire $(\widehat{\gamma}, \overline{\mathrm{W}})$ étend la paire $(\mathrm{G}, \overline{\mathrm{W}})$ après identification des groupes simpliciaux avec les groupoïdes simplicialement enrichis ayant un seul objet. On peut reformuler ce phénomène d'une autre manière : les deux constructions "espace de lacets" et "espace classifiant" prennent une forme particulièrement simple dans le cadre des groupoïdes simplicialement enrichis : ce sont des opérations de décalage.

2 Opérades cellulaires

2.1. *L'opérade des petits cubes.*

Les travaux de Boardman et Vogt [17] et May [37] montrent que la géométrie des espaces de lacets itérés se lit à travers l'action canonique de l'opérade des petits cubes. Le concept d'opérade a un sens dans toute catégorie munie d'une structure monoïdale symétrique. Dans ce chapitre, cette structure sera toujours cartésienne et sera donc notée $\times$.

Une opérade est une collection de $\mathfrak{S}_k$-objets $\mathcal{O}(k),\ k \geq 0$, munie d'une famille de multiplications $m_{i_1\dots i_k} : \mathcal{O}(k)\times\mathcal{O}(i_1)\times\cdots\times\mathcal{O}(i_k) \to \mathcal{O}(i_1+\cdots+i_k)$ vérifiant des axiomes d'associativité, d'unitarité et d'équivariance, où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe symétrique de l'ensemble $\{1,\dots,k\}$. L'objet $\mathcal{O}(k)$ représente l'ensemble des opérations homogènes $X^k \to X$ présentes dans une $\mathcal{O}$-algèbre X. Nous supposons également que $\mathcal{O}(0)$ est singleton ce qui implique que les $\mathcal{O}$-algèbres sont pointées et que l'opérade $\mathcal{O}$ elle-même est munie d'opérateurs $\phi^* : \mathcal{O}(k) \to \mathcal{O}(k')$ pour toute injection $\phi : \{1,\dots,k'\} \to \{1,\dots,k\}$.

Une E_∞-opérade est une *résolution $\mathfrak{S}$-cofibrante de l'opérade terminale.* Pour une E_∞-opérade topologique $\mathcal{O}$, cela veut dire que les espaces $\mathcal{O}(k)$ sont des $\mathfrak{S}_k$-fibrés universels et ont donc le type d'homotopie de l'espace des configurations $\mathrm{F}(\mathbb{R}^\infty, k)$, le groupe symétrique agissant par permutation des k points.

Pour obtenir une opérade topologique agissant sur un espace de lacets itéré, il faut remplacer les configurations de points par des configurations de petits cubes. En dimension n, un k-uplet de petits n-cubes est donné par les images de k applications affines $[0,1]^n \to [0,1]^n$ préservant la direction des axes et ayant des intérieurs 2à2 disjoints. L'espace $\mathcal{C}_n(k)$ des k-uplets de n-cubes se plonge alors canoniquement dans l'espace fonctionnel $\underline{\mathrm{Top}}_*(\mathrm{S}^n, (\mathrm{S}^n)^{\vee k})$. Ce dernier fait partie d'une opérade agissant sur les espaces de lacets n-fois itérés et le plongement respecte cette structure d'opérade. En passant à la limite $n \to \infty$ on obtient la E_∞-opérade des petits cubes $C_\infty(k),\ k \geq 0$, définie pour la première fois par Boardman et Vogt.

2.2. *Cellularisation subordonnée à un ensemble partiellement ordonné.* [4, 1.7]

Soient A un ensemble partiellement ordonné et X un espace topologique. Une *A-cellularisation* $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X est la donnée d'un foncteur $c : A \to \mathrm{Top}$ appliquant α sur c_α et d'un cône-colimite $c \to X$ tels que

1. c_α est contractile pour tout $\alpha \in A$;
2. le foncteur c est *Reedy cofibrant* dans la catégorie des A-diagrammes d'espaces topologiques.

La condition (1) implique que la colimite homotopique de c est faiblement équivalente à la réalisation géométrique $|A|$ du nerf de A; la condition (2) implique que la colimite homotopique est faiblement équivalente à la colimite usuelle; par conséquent, X et $|A|$ sont faiblement équivalents, cf. [4, 1.8]. La condition (2) signifie que pour tout $\alpha \in A$, le morphisme naturel $\varinjlim_{\beta<\alpha} c_\beta \to c_\alpha$ est une cofibration.

Si la condition (1) n'est pas satisfaite, on parlera de *pseudo-cellularisation*. Si X est muni d'une A-cellularisation et Y est muni d'une B-cellularisation, alors le produit $X \times Y$ est muni d'une $A \times B$-cellularisation. Si $f : Z \to X$ est une application continue telle que f^{-1} préserve les cofibrations, alors une cellularisation de X se relève en une pseudo-cellularisation de Z.

Pour tout $\alpha \in A$, la restriction de c à $\{\beta \in A \,|\, \beta < \alpha\}$ définit un sous-foncteur dont la colimite $c_{<\alpha}$ est munie d'une cofibration $c_{<\alpha} \to c_\alpha$. La cellule c_α est dite d'*intérieur vide* si cette cofibration est un isomorphisme. La restriction de c au sous-ensemble A' de A formé par les indices des cellules d'*intérieur non vide* définit alors une A'-cellularisation. Parfois, le passage aux cellules d'intérieur non vide permet d'obtenir une A'-cellularisation à partir d'une pseudo-A-cellularisation.

2.3. *E_n-opérades et leurs cellularisations.*

Par définition, une E_n-opérade est une *opérade $\mathfrak{S}$-cofibrante équivalente à l'opérade des petits n-cubes*. Cette définition est moins facile à manier que celle d'une E_∞-opérade car l'homologie des espaces des configurations $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$ est très riche. Fred Cohen [19] montre en effet que l'opérade graduée définie par l'homologie entière des espaces de configurations $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$ s'identifie à l'opérade dont les algèbres sont les algèbres de Poisson à crochet de Poisson de degré $n-1$.

Pour obtenir une cellularisation des espaces de configurations et des E_n-opérades, l'idée suivante de [4], [5] s'est révélée directrice : la cellularisation naturelle de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)$ induit une cellularisation de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$ grâce à la structure de *préopérade* de la collection $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$, $k \geq 1$. Une préopérade est un préfaisceau sur la catégorie des injections d'ensembles finis $\{1, \ldots, k\}$, $k \geq 1$. Toute opérade $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{O}(0) = \{*\}$ a une structure de préopérade (2.1). La collection $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$, $k \geq 1$, bien que dépourvue de structure d'opérade, porte une structure de préopérade induite par restriction.

L'espace $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)$ se rétracte par déformation sur la sphère S^{n-1}. Une rétraction explicite est donnée par $(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$. Or, la sphère S^{n-1} admet une cellularisation $\mathfrak{S}_2$-équivariante par des hémisphères. L'ensemble partiellement ordonné de ces hémisphères est isomorphe à $\mathcal{K}_n(2) = \{0, \ldots, n-1\} \times \mathfrak{S}_2$ avec $(\mu, \sigma) < (\mu', \sigma') \Leftrightarrow \mu < \mu'$ ou $(\mu, \sigma) = (\mu', \sigma')$. La cellularisation de S^{n-1} se relève en une cellularisation de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)$ possédant les cellules suivantes :

$$c_{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2) \,|\, x_{\sigma^{-1}(1)} \leq_\mu x_{\sigma^{-1}(2)}\}$$

où pour des points $s, t \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$(s_0, \ldots, s_{n-1}) \leq_\mu (t_0, \ldots, t_{n-1}) \Leftrightarrow s_\mu \leq t_\mu \text{ et } s_\nu = t_\nu \text{ pour } \nu > \mu.$$

La structure de préopérade de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, -)$ définit en particulier des projections $\phi_{ij} : \mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k) \to \mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)$ pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq k$. Le produit de ces projections définit une injection

$$\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k) \hookrightarrow \mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)^{\binom{k}{2}} : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto ((x_i, x_j))_{\{i,j\} \subset \{1,\ldots,k\}}$$

L'espace d'arrivée est muni d'une $\mathcal{K}_n(2)^{\binom{k}{2}}$-cellularisation, cf. (2.3). On désigne par $\mathcal{K}_n(k)$ l'ensemble partiellement ordonné rendant cartésien le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_n(k) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{K}_n(2)^{\binom{k}{2}} \arrow[d] \\
\mathfrak{S}(k) \arrow[r, hook] & \mathfrak{S}(2)^{\binom{k}{2}}
\end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{S}$ désigne l'opérade des permutations définie par $\mathfrak{S}(k) = \pi_0\mathcal{C}_1(k) \cong \mathfrak{S}_k$.

Les éléments de $\mathcal{K}_n(k)$ sont des couples $(\mu, \sigma) \in \{0, \ldots, n-1\}^{\binom{k}{2}} \times \mathfrak{S}_k$ où les composantes de μ sont indéxées par les parties à deux éléments de $\{1, \ldots, k\}$. La collection $\mathcal{K}_n$ forme une préopérade dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés. La $\mathcal{K}_n(2)^{\binom{k}{2}}$-cellularisation de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, 2)^{\binom{k}{2}}$ induit alors par double restriction une pseudo-$\mathcal{K}_n(k)$-cellularisation de $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$ compatible avec les structures de préopérade. Mieux que cela, en désignant par $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}(k) \subset \mathcal{K}_n(k)$ l'ensemble des indices des cellules d'intérieur non vide, nous obtenons :

Proposition 2.4. *[4, 1.17], [5, 2.3].*

a) $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$ *admet une* $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}(k)$*-cellularisation ayant comme cellules*

$$c_{(\mu,\sigma)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k) \,|\, x_{\sigma^{-1}(1)} \leq_{\mu_{\sigma^{-1}(1,2)}} \cdots \leq_{\mu_{\sigma^{-1}(k-1,k)}} x_{\sigma^{-1}(k)}\};$$

b) Un élément $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$ *appartient à* $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}(k)$ *si et seulement si pour tout* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k$ *on a* $\mu_{\sigma^{-1}(i_1,i_3)} = \max(\mu_{\sigma^{-1}(i_1,i_2)}, \mu_{\sigma^{-1}(i_2,i_3)})$.

c) L'inclusion de préopérades $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}} \hookrightarrow \mathcal{K}_n$ *est une équivalence faible. Toute préopérade intermédiaire* $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}} \hookrightarrow \mathcal{K}' \hookrightarrow \mathcal{K}_n$ *est faiblement équivalente aux deux.*

Cette cellularisation des espaces de configurations a été obtenue plusieurs fois en littérature, cf. [5, 2.4-7] pour une discussion détaillée. La plus ancienne source nous semble Fox-Neuwirth [24] dans le cas $n = 2$. La nouveauté de notre traitement provient du lien direct avec la décomposition des sphères en hémisphères et du plongement de $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}$ dans $\mathcal{K}_n$. Celui-ci est essentiel pour la cellularisation des E_n-opérades. En effet, il s'avère que $\mathcal{K}_n$ est une E_n-opérade partiellement ordonnée. La structure d'opérade de $\mathcal{K}_n$ est le plus aisément décrite en utilisant la description suivante des éléments de $\mathcal{K}_n(k)$, cf. [12].

Chaque élément $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$ représente un *graphe complet* à k sommets, muni d'une σ*-orientation* et d'un μ*-coloriage*, i.e. les arêtes sont orientées selon $\sigma^{-1}(1) \to \sigma^{-1}(2) \to \cdots \to \sigma^{-1}(k)$ et chaque arête $i \to j$ reçoit la couleur $\mu_{\{i,j\}}$. L'ordre partiel s'obtient alors comme suit : $(\mu, \sigma) \leq (\mu', \sigma')$ si et seulement si les couleurs du premier graphe sont inférieures aux couleurs correspondantes du second graphe, et ceci strictement si les orientations de l'arête coloriée diffèrent. La condition (2.4b) s'exprime en particulier comme une condition triangulaire. Les multiplications opéradiques $\mathcal{K}_n(k) \times \mathcal{K}_n(i_1) \times \cdots \times \mathcal{K}_n(i_k) \to \mathcal{K}_n(i_1 + \cdots + i_k)$ sont définies en construisant le graphe complet à $i_1 + \cdots + i_k$ par *substitution* des k graphes complets à $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sommets dans les k sommets du graphe directeur en démultipliant les arêtes de celui-ci autant que nécessaire. L'orientation ainsi obtenue concorde avec l'opérade des permutations, cf. [4, 2.5b], [5, 1.15b].

Théorème 2.5. *[4, 1.1, 2.8], [5, 1.11b, 1.16].*

L'opérade $\mathcal{K}_n$ est une opérade partiellement ordonnée dont la réalisation géométrique est une E_n-opérade. En particulier, toute opérade admettant une $\mathcal{K}_n$-cellularisation est une E_n-opérade.

Ce théorème décrit une propriété "intrinsèque" des E_n-opérades vérifiable dans un grand nombre de cas concrèts comme nous le verrons ci-dessous. En littérature, une caractérisation complète des E_n-opérades n'a été obtenue que pour $n = 1$ (Stasheff), $n = 2$ (Fiedorowicz) et $n = \infty$ (Boardman-Vogt-May).

Une $\mathcal{K}_n$-cellularisation d'une opérade $\mathcal{O}$ consiste en la donnée d'une $\mathcal{K}_n(k)$-cellularisation de $\mathcal{O}(k)$ pour $k \geq 0$ telle que la structure d'opérade de $\mathcal{O}$ respecte les cellularisations dans le sens suivant :

$$m^{\mathcal{O}}_{i_1 \cdots i_k}(c_\alpha \times c_{\alpha_1} \times \cdots \times c_{\alpha_k}) \subseteq c_{\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

La preuve du théorème utilise l'argument de la colimite homotopique (2.2). Toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une $\mathcal{K}_n$-cellularisation est en tant qu'opérade faiblement équivalente à l'opérade $|\mathcal{K}_n|$, le tertium comparationis étant justement l'opérade définie par la colimite homotopique de la $\mathcal{K}_n$-cellularisation de $\mathcal{O}$.

Il reste à montrer que $|\mathcal{K}_n|$ est une E_n-opérade, ce qui se fait en explicitant une $\mathcal{K}_n$-cellularisation de l'opérade des petits n-cubes. La méthode est la même que pour les espaces de configurations : en partant d'une $\mathcal{K}_n(2)$-cellularisation de $\mathcal{C}_n(2)$, on obtient par double restriction une pseudo-$\mathcal{K}_n(k)$-cellularisation de $\mathcal{C}_n(k)$. Cette pseudo-cellularisation induit une $\mathcal{K}_n^{\mathcal{C}}$-cellularisation par restriction aux cellules d'intérieur non vide. Comme $\mathcal{K}_n^{\mathcal{C}}$ contient $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}$, (2.4c) permet de conclure. Tout découle donc de la "bonne" $\mathcal{K}_n(2)$-cellularisation de $\mathcal{C}_n(2)$. Nous la devons à Fiedorowicz [4, 2.7b] : pour $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(2)$, la cellule $c_{(\mu,\sigma)}$ est formée par les couples de petits n-cubes séparables par un hyperplan perpendiculaire à un des premiers $\mu + 1$ axes du n-cube, où l'on exige que la répartition des deux cubes respecte la permutation σ si le $(\mu + 1)^{eme}$ axe est le premier axe "séparant".

2.6. *La filtration cellulaire d'une E_∞-opérade cellulaire.*

Les opérades des petits n-cubes s'emboîtent $\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{C}_2 \cdots \hookrightarrow \mathcal{C}_\infty$. Puisque le théorème (2.5) est valable pour tout n, la filtration naturelle de $\mathcal{K} = \varinjlim_n \mathcal{K}_n$ est la filtration d'une E_∞-opérade par des E_n-opérades. En général, étant donnée une E_∞-opérade, il n'est pas clair comment obtenir une telle filtration. Par contre, si l'opérade est munie d'une $\mathcal{K}$-cellularisation, alors la sous-opérade formée par les cellules appartenant à $\mathcal{K}_n$ est une E_n-opérade. Cette construction s'applique en particulier à l'opérade de Barratt-Eccles $\mathrm{W}\mathfrak{S}$, cf. [13] et (1.8). Nous noterons la filtration ainsi obtenue par $W_n\mathfrak{S}$.

Théorème 2.7. *[4, 2.7a], [5, 1.13, 2.8-10].*

L'opérade de Barratt-Eccles $\mathrm{W}\mathfrak{S}$ admet une $\mathcal{K}$-cellularisation. En particulier, la filtration $\mathcal{K}_n$-cellulaire $\mathrm{W}_n\mathfrak{S}$ est une filtration par des E_n-opérades. Elle coïncide avec la filtration de Smith [46].

Ce théorème permet non seulement de traiter une grande partie de l'article de Smith dans le cadre général des E_n-opérades, mais inversement de démontrer quelques théorèmes difficiles de cette théorie à l'aide de techniques simpliciales, notamment le fait que la complétion en groupe d'un E_n-espace est un espace de lacets n-fois itéré, cf. [4, 2.9]. Dans [10], nous montrons que la catégorie homotopique des $(\mathrm{W}_n\mathfrak{S})$-algèbres est équivalente à la catégorie homotopique des $\mathcal{C}_n$-algèbres ce qui établit clairement l'équivalence des points de vue simplicial et topologique. Smith [46] a conjecturé que $(\mathrm{W}_n\mathfrak{S})(k)$ a le type d'homotopie de l'espace des configurations $\mathrm{F}(\mathbb{R}^n, k)$. Cette conjecture fut démontrée par T. Kashiwabara [33]. C'est l'existence d'une structure de E_n-opérade sur $\mathrm{W}_n\mathfrak{S}$ qui est nouvelle. Celle-ci sera essentielle aux chapitres trois et quatre.

La preuve du théorème suit le schéma habituel : on définit une $\mathcal{K}(2)$-cellularisation de $(\mathrm{W}\mathfrak{S})(2)$ qui découle du fait que $(\mathrm{W}\mathfrak{S})(2) = \mathrm{W}\mathfrak{S}_2$ est le modèle simplicial $\mathfrak{S}_2$-équivariant de la sphère de dimension infinie. Par double restriction on en déduit une pseudo-$\mathcal{K}(k)$-cellularisation de $(\mathrm{W}\mathfrak{S})(k)$ qui est en fait une cellularisation puisque les cellules $c_{(\mu,\sigma)}$, $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(k)$, sont toutes contractiles. La compatibilité des structures d'opérade est une conséquence de ce que la structure d'opérade de $\mathrm{W}\mathfrak{S}$ est induite par l'opérade des permutations.

Signalons enfin que la filtration $\mathrm{W}_n\mathfrak{S}$ s'interprète comme une filtration *sphérique* : $(\mathrm{W}_n\mathfrak{S})(k)$ est l'image réciproque du produit des sphères $(\mathrm{S}^{n-1})^{\binom{k}{2}} \cong (\mathrm{W}_n\mathfrak{S})(2)^{\binom{k}{2}}$ par rapport à l'inclusion canonique $(\mathrm{W}\mathfrak{S})(k) \hookrightarrow (\mathrm{W}\mathfrak{S})(2)^{\binom{k}{2}}$. Ceci montre que seulement pour $k = 2$, la filtration $(\mathrm{W}_n\mathfrak{S})(2)$ correspond à la filtration naturelle du fibré universel $\mathrm{W}\mathfrak{S}_2$, tandisque pour $k > 2$, la filtration est bien différente de la filtration naturelle du fibré universel $\mathrm{W}\mathfrak{S}_k$.

2.8. *Le modèle de Milgram de* $\Omega^n\mathrm{S}^n(X)$.

Un résultat-clé de la théorie des E_n-opérades dit que pour toute E_n-opérade $\mathcal{O}$ et tout espace connexe $(X, *)$, l'algèbre libre $\mathcal{O}(X)$ est faiblement équivalente à $\Omega^n\mathrm{S}^n(X)$. Un des premiers modèles combinatoires de $\Omega^n\mathrm{S}^nX$ est dû à Milgram, cf. [39]. Dans [4],[5], la construction de Milgram est exprimée comme l'endofoncteur associé à une préopérade J_n permettant de l'analyser avec les techniques de cellularisation du paragraphe (2.3). La préopérade est donnée par certains quotients $J_n(k) = ((P_k)^{n-1} \times \mathfrak{S}_k)/\sim$ qui font intervenir les permutoèdres P_k associés aux groupes symétriques $\mathfrak{S}_k$. L'intérêt de cette préopérade provient de sa relation avec la géométrie de Coxeter des groupes symétriques. En particulier, l'espace $J_2(k)$ coïncide avec le complexe de Salvetti de l'espace de configuration de k points de la droite complexe. Dans [4], [5], nous affirmons que la préopérade J_n est munie d'une structure d'opérade. M. Brinkmeier a montré dans [18] qu'il n'en est rien : la prétendue structure multiplicative est incompatible avec les opérateurs de dégénérescence de la préopérade J_n.

Le permutoèdre P_k est l'enveloppe convexe des matrices de permutations dans l'espace affine des matrices réelles $k \times k$. C'est donc l'espace des matrices probabilistes $k \times k$. Rappelons qu'un sous-groupe de Coxeter de $\mathfrak{S}_k$ est un sous-groupe engendré par des transpositions élémentaires $(i\,i{+}1) \in \mathfrak{S}_k$. Chaque sous-groupe de Coxeter est isomorphe à un produit $\mathfrak{S}_{k_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{k_s}$ avec $k_1 + \cdots + k_s = k$, où $k - s$ est le nombre de générateurs. Le permutoèdre P_k est un polytope convexe dont les faces s'identifient canoniquement aux classes résiduelles des sous-groupes de Coxeter de $\mathfrak{S}_k$. Nous appellerons *principales* les faces correspondant aux sous-groupes de Coxeter eux-mêmes. La relation d'équivalence induisant le quotient $J_n(k)$ est de telle sorte que tout point $x \in J_n(k)$ admet un et un seul représentant $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; \sigma) \in (P_k)^{n-1} \times \mathfrak{S}_k$ subordonné à une suite décroissante de faces principales $c_1 \supset c_2 \supset \cdots \supset c_{n-1}$. Nous dirons alors que $x \in J_n(k)$ appartient à l'intérieur de la cellule $c_{(\mu,\sigma)}, (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$, si μ_{ij} compte le nombre de faces principales dans la suite décroissante ci-dessus qui contiennent des permutations inversant i et j.

Proposition 2.9. *[4, 3.10], [5, 2.13]*

La préopérade J_n admet une $\mathcal{K}_n^J$-cellularisation. Un élément $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$ appartient à $\mathcal{K}_n^J(k)$ si et seulement si pour tout $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k$ on a

$$\mu_{\sigma^{-1}(i_1,i_3)} = \min(\mu_{\sigma^{-1}(i_1,i_2)}, \mu_{\sigma^{-1}(i_2,i_3)}).$$

L'inclusion de préopérades $\mathcal{K}_n^J \hookrightarrow \mathcal{K}_n$ est une équivalence faible. Toute préopérade intermédiare $\mathcal{K}_n^J \hookrightarrow \mathcal{K}' \hookrightarrow \mathcal{K}_n$ est faiblement équivalente aux deux.

La deuxième partie se démontre comme (2.4c) en utilisant que $\mathcal{K}_n^J(k)$ est l'ordre partiel dual de $\mathcal{K}_n^{\mathrm{F}}(k)$. Une conséquence immédiate de (2.9) est le théorème d'approximation de Milgram : $J_n(X) \sim \Omega^n \mathrm{S}^n(X)$ si X est connexe.

2.10. *Catégories monoïdales itérées.*

Balteanu, Fiedorowicz, Schwänzl et Vogt définissent dans [12] le concept de catégorie monoïdale n-fois itérée en transportant dans le contexte catégoriel le fait topologique qu'un espace de lacets n-fois itérés est un espace de lacets simples dans la catégorie des espaces de lacets $(n-1)$-fois itérés. La structure catégorielle que ces auteurs décrivent est étroitement liée à l'opérade $\mathcal{K}_n$.

En effet, l'opérade catégorielle $\mathcal{M}_n$ dont les algèbres sont les catégories monoïdales n-fois itérées est partiellement ordonnée par le théorème de cohérence de [12]. Elle s'identifie à une sous-opérade de $\mathcal{K}_n$: un élément $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$ appartient à $\mathcal{M}_n(k)$ si et seulement s'il peut s'écrire $(\mu, \sigma) = (\mu_1, \sigma_1)\Box_i(\mu_2, \sigma_2)$, où $\Box_i$ désigne la "composition" $(i, id_{\{1,2\}}) \in \mathcal{K}_n(2)$ et où de manière récursive $(\mu_j, \sigma_j) \in \mathcal{M}_n(k_j)$, $j = 1, 2$, avec $k_1 + k_2 = k$ et $\mathcal{M}_n(1) = \mathcal{K}_n(1)$. Ainsi, les éléments de $\mathcal{M}_n(k)$ correspondent aux graphes complets (μ-coloriés et σ-orientés) qui se décomposent complètement selon la règle ci-dessus.

En restreignant la $\mathcal{K}_n^{\mathcal{C}}$-cellularisation de l'opérade $\mathcal{C}_n$ des petits n-cubes aux cellules indexées par $\mathcal{M}_n$, on obtient la sous-opérade $\mathcal{D}_n$ de $\mathcal{C}_n$ formée par les configurations décomposables de n-cubes. Cette opérade a été introduite par G. Dunn [21] qui montre qu'elle s'identifie à la n-ieme puissance tensorielle de l'opérade $\mathcal{C}_1$ des petits intervalles. Dans [12], le fait que l'inclusion $\mathcal{D}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_n$ est une équivalence faible d'opérades est utilisé pour montrer que $\mathcal{M}_n$ est une E_n-opérade. Comme $\mathcal{M}_n$ contient les préopérades $\mathcal{K}_n^F$ et $\mathcal{K}_n^J$, nous obtenons le même résultat par (2.4) ou son dual (2.9), cf. [5, 2.4].

3 Ensembles cellulaires et catégories supérieures

Dans sa poursuite des champs, Grothendieck cherchait entre autre une structure algébrique qui généralise celle du groupoïde fondamental et qui tienne compte du type d'homotopie d'un espace. Depuis les travaux de Whitehead, nous savons que les 2-groupoïdes (resp. les modules croisés) modélisent les 2-types d'homotopie. Cependant, déjà au rang suivant, les 3-groupoïdes ne suffisent plus. Dans un travail remarquable [35], Olivier Leroy esquisse qu'en substituant aux 3-groupoïdes "stricts" les 3-groupoïdes "semi-stricts", l'équilibre est rétabli, est tous les 3-types d'homotopie se réalisent catégoriellement. Dans un autre contexte, Gordon, Power et Street [25] définissent le concept de tricatégorie et montrent que toute tricatégorie est triéquivalente à une 3-catégorie semi-stricte, mais en général pas triéquivalente à une 3-catégorie stricte (tandisque toute bicatégorie est biéquivalente à une 2-catégorie stricte). Ce parallélisme entre modélisation algébrique du type d'homotopie et structure des catégories supérieures n'est pas fortuite. L'enjeu d'un bon dictionnaire entre les deux est bien illustré dans l'article récent [11] de Baez et Dolan. Un des attraits d'une bonne théorie des catégories supérieures provient de la simplicité que prennent les foncteurs espace de lacets et espace classifiant dans le contexte catégoriel : ce sont des opérations de décalage, cf. le dernier paragraphe du premier chapitre.

Dans cette optique, l'article [7] traite simultanément les 3-catégories semi-strictes et les catégories monoïdales tressées. En effet, ces dernières ne sont autres (après décalage) que des 3-catégories semi-strictes ayant un seul objet et un seul morphisme. Nous obtenons les deux résultats suivants :

Proposition 3.1. *[7, 1.2]*
Le nerf d'une catégorie monoïdale tressée est muni d'une action canonique du deuxième étage de la filtration de l'opérade de Barratt-Eccles. En particulier, la réalisation géométrique d'une catégorie monoïdale tressée est à complétion en groupe près un espace de lacets doubles.

Théorème 3.2. *[7, 3.1]*
La catégorie des 3-groupoïdes semi-stricts est une catégorie de modèles fermée et admet un nerf simplicial, adjoint à droite d'une équivalence de Quillen avec la catégorie des ensembles simpliciaux 3-cosquelettaux.

La deuxième partie de (3.1) est due à Fiedorowicz [23]. Notre $\mathrm{W}_2\mathfrak{S}$-action est la transcription "opéradique" fidèle du théorème de cohérence de Joyal et Street [28] pour les catégories monoïdales tressées. Ce qui surprend, c'est que les groupes de tresses sont cachés à l'intérieur des groupes symétriques via *l'ordre de Bruhat faible*. En effet, la preuve de (3.1) repose sur une décomposition de $\mathrm{W}_2\mathfrak{S}(k)$ en somme amalgamée de $k!$ copies du nerf de l'ordre de Bruhat faible sur $\mathfrak{S}_k$. La conclusion découle ensuite de (2.7).

Le théorème (3.2) est en grande partie dû à Leroy. Il existe également des notes [29] de Joyal et Tierney consacrées à ce théorème. La difficulté consiste à comparer les deux nerfs qui apparaissent dans (3.1) et dans (3.2), et de montrer que le passage de l'un à l'autre correspond à un double délaçage (resp. laçage).

En construisant le modèle algébrique du 3-type de la 2-sphère ainsi obtenu, on s'aperçoit qu'il encode essentiellement l'exemple universel du premier invariant de Hopf, i.e. le générateur de $\pi_3(S^2)$. Un des bénéfices d'une bonne théorie de n-groupoïdes faibles pourrait être la reconstitution du n-type d'homotopie à partir d'un formalisme algébrique d'invariants de Hopf supérieurs. La recherche actuelle en est encore loin.

A l'horizon se dessinent toutefois plusieurs définitions de n-catégorie faible, cf. Leinster [34]. Le restant du chapitre est consacré à la comparaison de deux d'entre elles : celle de Batanin [14], basée sur le concept de n-opérade, et celle de Joyal [27], basée sur le concept d'ensemble n-cellulaire. L'idée directrice dans [8] a été que le passage de l'un à l'autre s'effectue par la construction d'un nerf.

Nous désignerons par Θ la catégorie cellulaire de Joyal [27] et par Θ_0 la sous-catégorie de Θ ayant les mêmes objets, mais comportant seulement les opérateurs "globulaires", cf. [8, 1.8]. Pour donner une idée intuitive, nous mentionnons que Θ est munie d'une filtration complète par des sous-catégories pleines $\cdots \subset \Theta^{(n)} \subset \Theta^{(n+1)} \subset \cdots$ telle que la catégorie Δ s'identifie à $\Theta^{(1)}$ et telle que les quotients $\Delta^{\times n}/\sim$ de Simpson [44] se plongent dans $\Theta^{(n)}$. La sous-catégorie $\Delta_0 = \Theta^{(1)} \cap \Theta_0$ de Δ comporte les opérateurs simpliciaux tels que $\phi(i+1) = \phi(i) + 1$ pour tout i. Les objets de Θ sont en bijection avec les (classes d'isomorphie d') arbres à niveaux planaires et finis.

Théorème 3.3. *[8, 1.12]*
La catégorie cellulaire Θ est une sous-catégorie dense de $\omega\mathrm{Cat}$, i.e. le nerf associé est pleinement fidèle. Il identifie les ω-catégories strictes aux préfaisceaux sur Θ dont la restriction à Θ_0 est un faisceau.

Théorème 3.4. *[8, 3.9]*
La catégorie des préfaisceaux sur Θ admet une structure de modèles fermée induite par réalisation géométrique. Cette réalisation préserve les colimites ainsi que les limites finies et forme l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen avec la catégorie des espaces topologiques.

En vue de ces deux théorèmes, nous appelons les préfaisceaux sur Θ *ensembles cellulaires* et le nerf défini par l'inclusion $\Theta \hookrightarrow \omega\mathrm{Cat}$ *nerf cellulaire.*

Les énoncés analogues pour $\Delta = \Theta^{(1)}$ sont bien connus. Il nous a fallu en trouver des preuves qui se généralisent bien à notre cas. Le fait que l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathrm{Cat}$ est dense équivaut à la caractérisation des nerfs simpliciaux par Grothendieck et Segal [42]: Un ensemble simplicial X est le nerf d'une catégorie si et seulement si les applications de Segal $X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ sont des bijections pour tout $n > 0$. Nous exprimons cette condition comme une condition faisceautique restreinte, à savoir que la restriction de X à la sous-catégorie Δ_0 est un faisceau. La sous-catégorie Δ_0 est un site dont les cribles couvrants sont les familles épimorphiques. Les applications de Segal sont précisément induites par les cribles couvrants minimaux. La propriété faisceautique du nerf simplicial découle de l'existence d'un système de factorisation $\Delta = (\Delta_{cov}, \Delta_0)$ où Δ_{cov} comporte les opérateurs simpliciaux $\phi : [m] \to [n]$ tels que $\phi(0) = 0$ et $\phi(m) = n$, cf. [8, 1.13].

Théorème (3.3) repose sur un système de factorisation analogue (Θ_{cov}, Θ_0) pour la catégorie cellulaire Θ, cf. [8, 1.11]. Il est à noter que Joyal [27] ne définit pas Θ, mais la catégorie opposée Θ^{op}. Notre définition de Θ est la suivante :

$$\Theta(S, T) = \omega\mathrm{Cat}(\omega(S_*), \omega(T_*)).$$

Pour tout arbre à niveaux T de hauteur n, le symbole T_* désigne le n-graphe des secteurs de T et $\omega(S_*)$ désigne la n-catégorie librement engendrée par le n-graphe T_*, cf. [8, 1.2, 1.8]. La forme explicite de ces deux constructions est due à Batanin [14]. Par exemple, pour l'arbre à niveaux de hauteur 1 ayant n feuilles, on obtient un graphe linéaire de longueur n qui engendre l'ordinal $[n]$. Ainsi, pour valider (3.3), il faut établir l'équivalence des deux définitions de Θ, ce qui est fait dans [8, 2.2]. La définition de Joyal implique l'existence d'un foncteur covariant $\Theta \to \mathrm{Top}$ qui réalise tout arbre à niveaux par une cellule convexe de dimension égale au nombre d'arêtes de l'arbre. Le petit miracle est que les opérateurs de Θ se réalisent également. Il s'ensuit alors (en tensorisant avec ce foncteur) que tout ensemble cellulaire admet une réalisation géométrique qui préserve les colimites. Point capital dans la preuve du théorème (3.4) est le fait que cette réalisation géométrique préserve également les produits finis [8, 2.2] et que le produit de deux cellules standard $\Theta[S] \times \Theta[T]$ s'écrit comme une somme amalgamée de cellules standard $\Theta[U]$, cf. [8, 2.8]. Ceci généralise directement la décomposition de $\Delta[n] \times \Delta[m]$ en $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ copies de $\Delta[n+m]$.

Une structure de modèles définit en particulier *fibrations* et objets *fibrants*. Comme pour les ensembles simpliciaux, les objets fibrants parmi les ensembles cellulaires sont caractérisés par l'existence de certaines cellules de remplissage. Dans le langage des catégories de modèles, cela s'exprime par l'existence d'un *système générateur de cofibrations triviales* (les inclusions de cornes). La preuve de l'existence d'une structure de modèles donnée en [8, 3.9] est même nouvelle si on la restreint aux ensembles simpliciaux, car elle ne fait pas appel aux fibrations minimales et par conséquent pas non plus à l'axiome du choix.

Les deux énoncés (3.3) et (3.4) ensemble impliquent que la catégorie des ω-catégories est une sous-catégorie pleine d'une catégorie admettant une théorie d'homotopie équivalente à la théorie d'homotopie des espaces. On voudrait en déduire une théorie d'homotopie pour les ω-catégories elles-mêmes comme l'a fait Thomason [48] dans le cas des catégories. La difficulté est la même dans les deux cas : l'adjoint à gauche du nerf n'a pas de bonnes propriétés homotopiques. Par exemple, la catégorification du bord de $\Delta[3]$ est isomorphe à la catégorification de $\Delta[3]$. Pour contourner cette difficulté, Thomason utilise des techniques de subdivision barycentrique. L'inconvénient de cette subdivision est qu'elle ne préserve pas les produits. Ceci implique que la structure de modèles de Thomason n'est pas monoïdale symétrique, cf. [10]; en plus, les objets cofibrants sont difficiles à caractériser. Notre méthode est différente et consiste à ajouter un paramètre simplicial et à considérer les ensembles cellulaires (resp. les ω-catégories) comme les objets *discrets* parmi les préfaisceaux simpliciaux sur Θ (resp. les ω-catégories simpliciales). Ce rajout d'un paramètre simplicial donne plus de souplesse, ce que l'on peut illustrer à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.5. *[8, 2.12]*

Pour un ensemble cellulaire X, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) X est le nerf cellulaire d'une ω-catégorie;

(ii) l'inclusion du bord extérieur $\partial_{out}\Theta[T] \hookrightarrow \Theta[T]$ induit une bijection $X^{\Theta[T]} \xrightarrow{\sim} X^{\partial_{out}\Theta[T]}$ pour tout arbre non-linéaire T;

(iii) toute corne intérieure de X admet un remplissage unique.

Ici, nous distinguons les inclusions de faces *intérieures* resp. *extérieures* selon qu'elles sont induites par un opérateur $\phi \in \Theta_{cov}(S,T)$ resp. $\phi \in \Theta_0(S,T)$. Une corne est intérieure si la face manquante l'est. Pour les opérateurs simpliciaux $\Delta[n-1] \to \Delta[n]$, les faces intérieures sont induites par $\partial_i, 0 < i < n$, et les faces extérieures sont induites par ∂_0 et ∂_n. En particulier, le bord extérieur de $\Delta[2]$ coïncide avec l'unique corne intérieure $\Lambda^1[2] \hookrightarrow \Delta[2]$. La propriété (iii) des nerfs simpliciaux est bien connue. La propriété (ii) résulte du fait que le bord extérieur de $\Delta[n]$ pour $n > 1$ contient le chemin d'arêtes $(0\,1), (1\,2), \ldots, (n{-}1\,n)$. Les preuves analogues pour le nerf cellulaire reposent sur (3.3).

Les complexes de Kan faibles de Boardman et Vogt [17] sont des ensembles simpliciaux ayant des remplissages (non nécessairement uniques) pour toutes les cornes intérieures. Par analogie, Joyal définit une θ-catégorie comme un ensemble cellulaire ayant des remplissages pour les cornes intérieures. Il s'agit donc d'un affaiblissement de la condition (iii). Or, à l'aide du paramètre simplicial supplémentaire, nous pouvons exprimer au moins l'affaiblissement de la condition (ii) de manière purement homotopique :

Théorème 3.6. *[8, 4.2, 2.11, 4.9]*

Les préfaisceaux simpliciaux sur Θ portent une structure de modèles dont les équivalences faibles sont définies par réalisation géométrique et dont les objets fibrants ont la propriété caractéristique que l'inclusion du bord extérieur induit une fibration simpliciale qui est triviale si la cellule n'est pas globulaire.

En particulier, comme une fibration triviale d'ensembles simpliciaux est surjective en tout degré, un objet fibrant dans cette structure est une θ-catégorie en tout degré simplicial, c'est donc en quelque sorte une θ-catégorie simpliciale.

Théorème 3.7. *[8, 4.17]*

La catégorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux sur Θ est engendrée par les objets discrets, i.e. les ensembles cellulaires. De plus, la structure de modèles se restreint aux ω-catégories simpliciales et induit une équivalence de catégories homotopiques : $\mathbf{Ho}(\mathrm{Ens}^{\Theta^{op}}) \sim \mathbf{Ho}(\omega\mathrm{Cat})$.

Cette propriété que tout objet de la catégorie homotopique est isomorphe à un objet simplicialement discret découle de ce que pour un préfaisceau simplicial *fibrant* X, l'inclusion des “points” $X([0]) \hookrightarrow X$ est une équivalence faible de préfaisceaux simpliciaux. Rezk, Schwede et Shipley [41] montrent que certaines catégories de modèles admettent une extension de leur structure de modèles aux objets simpliciaux de sorte que la dite propriété soit satisfaite. Nous ignorons si les ensembles cellulaires portent une structure de modèles pour laquelle la structure (3.6) se déduise par le procédé de Rezk, Schwede et Shipley. Une telle structure impliquerait que l'équivalence homotopique (3.7) serait induite par une équivalence de Quillen au niveau des objets discrets. Mais pour une telle structure, la classe des cofibrations est nécessairement *plus petite* que la classe des monomorphismes, car pour tout objet *cofibrant* X d'une telle structure, la catégorification $X \to \mathcal{N}_\omega \mathrm{cat}_\omega X$ doit etre une équivalence faible, ce qui n'est pas le cas pour un ensemble cellulaire quelconque. Le coeur de (3.7) consiste justement à établir cette propriété pour les préfaisceaux simpliciaux X qui sont *cofibrants* dans notre structure de modèles, cf. [8, 4.12, 4.13].

Les énoncés (3.4) et (3.7) impliquent que les ω-catégories admettent une théorie d'homotopie équivalente à la théorie d'homotopie des espaces. Ceci n'est pas surprenant étant donné que Thomason [48] établit cette propriété pour les catégories et que toute catégorie est un exemple particulier d'une ω-catégorie. La question qui occupait Grothendieck et également Batanin est de savoir ce qui en est avec les ω-groupoïdes. Si l'on se restreint aux ω-groupoïdes stricts, alors la réponse est connue et négative. Nous montrons de manière précise :

Proposition 3.8. *[7, 3.4]*

Un 3-type d'homotopie X se réalise par un 3-groupoïde strict si et seulement s'il s'identifie au produit cartésien du 2-type sous-jacent avec l'espace d'Eilenberg MacLane $K(\pi_3(X), 3)$.

D'où la recherche d'un concept convenable de ω-catégorie faible, capable de modéliser les types d'homotopie par l'intermédiaire de "ses" ω-groupoïdes faibles. Il faut dire que (3.7) fournit un premier élément de réponse et que la "bonne" structure de modèles sur les ensembles cellulaires permettrait de comprendre les ω-catégories et ω-groupoïdes faibles à l'intérieur de la catégorie des ensembles cellulaires. Ceci est le contenu du projet de Joyal [27] et reflète également l'approche de Tamsamani [47] et de Simpson [44]. L'approche "opéradique" de Batanin [14] est fondamentalement différente en ce qu'elle recherche une description *algébrique* des ω-catégories faibles, encodée par l'action d'une ω-opérade. La complexité de cette structure algébrique est évidente étant donné qu'elle contient implicitement le calcul des groupes d'homotopie des sphères.

La comparaison de ces deux approches, "faisceautique" et "opéradique", que nous avons établie dans [8], est analogue de celle en homotopie stable entre les Γ-espaces de Segal [43] et les E_∞-espaces de Boardman, Vogt [17] et May [37]. L'idée directrice est d'associer à toute ω-opérade A de Batanin une catégorie d'opérateurs Θ_A "fibrée" au-dessus de Θ. Toute A-algèbre possède alors un nerf A-cellulaire (i.e. préfaisceau sur Θ_A) auquel on peut associer un préfaisceau simplicial sur Θ en utilisant une extension de Kan "homotopique" lelong de $\Theta_A \to \Theta$. Cette construction remonte à Segal [43]. Nous l'identifions au foncteur dérivé à gauche de l'extension de Kan, cf. [40], [8, 2.14]. Ici à nouveau, nous avons besoin du paramètre simplicial supplémentaire.

Théorème 3.9. *[8, 1.17]*

La catégorie Θ_A est une sous-catégorie dense de la catégorie des A-algèbres, i.e. le nerf associé est pleinement fidèle. Il identifie les A-algèbres aux préfaisceaux sur Θ_A dont la restriction à Θ_0 est un faisceau.

Théorème 3.10. *[8, 4.11, 4.17]*

La catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur Θ_A admet une structure de modèles définie par réalisation géométrique. Cette structure se restreint aux A-algèbres simpliciales via une équivalence de Quillen. Les catégories homotopiques sont engendrées par les objets simplicialement discrets.

Les énoncés (3.9) et (3.10) généralisent (3.3) et (3.6) qui représentent le cas de l'opérade terminale ω. En effet, nous posons

$$\Theta_A(S,T) = \mathrm{Alg}_A(A(S_*), A(T_*)).$$

La sous-catégorie Θ_0 est donnée par les morphismes appartenant à l'image du foncteur libre $A(-)$. Par conséquent, $\Theta_0(S,T)$ s'identifie aux morphismes globulaires $\mathrm{Hom}(S_*, T_*)$. Le nerf A-cellulaire d'une A-algèbre X est définie par

$$(\mathcal{N}_A X)(T) = \mathrm{Alg}_A(A(T_*), X) = \mathrm{Hom}(T_*, X) =: X^T.$$

L'ensemble des T-cellules du nerf de X correspond donc à l'ensemble des T-configurations de cellules de X. En particulier, se donner une A-algèbre X équivaut à se donner un ensemble globulaire X muni d'opérations associatives et unitaires

$$\Theta_A(S,T) \times X^T \to X^S.$$

L'hypothèse que A est une ω-opérade implique l'existence d'un système de factorisations $\Theta_A = (\Theta^A_{cov}, \Theta_0)$. Le point essentiel est que le foncteur libre $A(-)$ est déjà entièrement déterminée par la famille $A(T)_n = \Theta^A_{cov}(n,T)$ ou n désigne l'arbre linéaire de hauteur n, ce qui implique que n_* est la n-cellule globulaire. Autrement dit, une A-algèbre X est entièrement déterminée par une famille de "multi-évaluations" $A(T)_n \times X^T \to X_n$. Pour l'opérade terminale ω, les ensembles $\omega(T)_n$ sont singletons, donc toute T-configuration de cellules d'une ω-algèbre a une évaluation unique en une n-cellule globulaire : c'est une des définitions possibles d'une ω-catégorie stricte. De là, il n'y a qu'un pas à franchir pour obtenir la définition d'une ω-catégorie faible au sens de Batanin: c'est une A-algèbre pour une ω-opérade A qui est (dans un sens précis) équivalente à l'opérade terminale ω, bref qui est *contractile*, cf. [8, 1.20] et Leinster [34].

Théorème 3.11. *[8, 4.14]*

Si A est contractile, alors le changement de base lelong de $\Theta_A \to \Theta$ (resp. $A \to \omega$) induit une équivalence de Quillen entre les catégories de préfaisceaux simpliciaux (resp. d'algèbres simpliciales).

En regroupant les énoncés précédents, nous obtenons la chaîne suivante d'équivalences de catégories, où s désigne le paramètre simplicial supplémentaire, cf. [8, 4.18] :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ho}(\mathrm{Alg}_A) \arrow[r, "\sim", "(3.10)"'] & \mathbf{Ho}(s\mathrm{Alg}_A) \arrow[d, "\sim"', "(3.11)"] & \mathbf{Ho}(s\mathrm{S}^{\Theta_A^{\mathrm{op}}}) \arrow[l, "\sim"', "(3.10)"] \arrow[d, "\sim"', "(3.11)"] & \\
& \mathbf{Ho}(s\mathrm{Alg}_\omega) & \mathbf{Ho}(s\mathrm{S}^{\Theta^{\mathrm{op}}}) \arrow[l, "\sim"', "(3.7)"] \arrow[r, "\sim", "(3.7)"'] & \mathbf{Ho}(\mathrm{Top})
\end{tikzcd}$$

En vue de ce diagramme, la modélisation des types d'homotopie par des ω-groupoïdes faibles se ramène à l'explicitation d'une ω-operade contractile A ayant la propriété que tout type d'homotopie de A-algèbres contient un représentant "groupoïdal". Pour les 3-types d'homotopie, le problème est résolu par (3.2), puisque les 3-catégories semi-strictes sont des algèbres sur une 3-opérade contractile, cf. [8, 1.21].

4 Sur la structure E_∞ des cochaînes d'un espace

L'algèbre de cohomologie mod p d'un espace est un invariant homotopique fin, surtout quand on y rajoute l'action de l'algèbre de Steenrod mod p. La structure correspondante sur les cochaînes (singulières normalisées) de l'espace est celle d'une E_∞-algèbre. L'absence de commutativité stricte reflète l'*asymétrie* de la diagonale d'Alexander-Whitney.

Une E_∞-algèbre dans la catégorie des complexes de chaînes est définie par l'action d'une E_∞-opérade. Cette dernière est une résolution $\mathfrak{S}$-projective de l'opérade qui agit sur les algèbres commutatives. L'existence d'une structure E_∞ sur les cochaînes remonte à Dold [20]. Hinich [26] montre que l'opérade peut être choisie *cofibrante* ce qui implique que les E_∞-algèbres correspondantes forment une catégorie de modèles. Dans un travail en commun avec Ieke Moerdijk [10], nous donnons des preuves élémentaires pour ces résultats. Mandell [36] montre que pour un espace nilpotent et p-complet, une structure E_∞ sur les cochaînes détermine le type d'homotopie.

Ce chapitre présente un travail en commun avec Benoît Fresse [9]. Nous y décrivons une action explicite de l'opérade $\mathcal{E}$, formée par les chaînes normalisées de l'opérade $\mathrm{W}\mathfrak{S}$ de Barratt-Eccles, sur les cochaînes normalisées de tout ensemble simplicial. Cette action peut être considérée comme une version *entière* des opérations de Steenrod. L'intérêt provient également du fait qu'elle se factorise par une opérade-quotient $\mathcal{X}$ sensiblement plus petite. Le passage au quotient est une équivalence faible d'opérades filtrées. D'après McClure-Smith [38], le deuxième étage de la filtration $\mathcal{F}_2\mathcal{X}$ agit sur les cochaînes de Hochschild d'une algèbre associative. Ceci, joint au théorème (2.7), donne une preuve élémentaire d'une conjecture de Deligne, très discutée pendant ces dernières années. En particulier, le passage au quotient $\mathcal{F}_2\mathcal{E} \to \mathcal{F}_2\mathcal{X}$ relie certaines opérations de Steenrod aux opérations "brace" de Getzler et Kadeishvili d'une manière surprenante et à ce jour incomprise.

Un avantage majeur de l'opérade de chaînes $\mathcal{E}$ de Barratt-Eccles est que c'est une *opérade de Hopf*, i.e. une opérade dans la catégorie des cogèbres différentielles graduées. La diagonale $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ provient de la diagonale simpliciale $\mathrm{W}\mathfrak{S} \to \mathrm{W}\mathfrak{S} \times \mathrm{W}\mathfrak{S}$. La compatibilité avec la structure d'opérade découle d'une associativité mixte reliant les morphismes d'Eilenberg-Zilber et d'Alexander-Whitney

$$EZ : \mathrm{N}_*(X) \otimes \mathrm{N}_*(Y) \leftrightarrows \mathrm{N}_*(X \times Y) : AW$$

Contrairement au morphisme d'Alexander-Whitney, le morphisme d'Eilenberg-Zilber est symétrique, condition nécessaire pour que $\mathcal{E}$ soit une opérade. En effet, la structure multiplicative de $\mathcal{E}$ l'utilise de manière essentielle :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(k) \otimes \mathcal{E}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(i_k) &\stackrel{EZ}{\to} \mathrm{N}_*(\mathrm{W}\mathfrak{S}(k) \times \mathrm{W}\mathfrak{S}(i_1) \times \cdots \times \mathrm{W}\mathfrak{S}(i_k)) \\
&\to \mathrm{N}_*(\mathrm{W}\mathfrak{S}(i_1 + \cdots + i_k)) \\
&= \mathcal{E}(i_1 + \cdots + i_k)
\end{aligned}$$

Théorème 4.1. *[9, 3.1]*
La catégorie des $\mathcal{E}$-algèbres différentielles graduées porte une structure de modèles fermée dans laquelle les équivalences faibles et les fibrations sont définies au niveau des modules différentiels gradués sous-jacents.

Les résultats de Mandell [36], joints à notre $\mathcal{E}$-action sur les cochaînes (4.2), impliquent alors que $X \mapsto \mathrm{N}^*(X,k)$ induit une équivalence de Quillen entre la catégorie des espaces nilpotents p-complets et la catégorie des $\mathcal{E}$-k-algèbres vérifiant $Sq^0 = id$. Ici, k désigne un corps de caractéristique p ayant un morphisme de Frobenius surjectif. Dans la preuve de (4.1), l'existence d'une diagonale est essentielle : en effet, il suffit de construire un objet de chemins (1.1) pour la catégorie des $\mathcal{E}$-algèbres. Les chaînes $\mathrm{N}_*(\Delta[1])$ sur l'intervalle standard forment une $\mathcal{E}$-cogèbre par (4.2); il s'ensuit que pour toute $\mathcal{E}$-algèbre A, le hom interne de la catégorie des complexes de chaînes $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{N}_*(\Delta[1]), A)$ est muni d'une structure de $\mathcal{E}$-algèbre par une formule de convolution bien connue. La diagonale de $\mathcal{E}$ est nécessaire pour distribuer aux deux facteurs. Cette construction fournit l'objet de chemins requis.

Théorème 4.2. *[9, 2.1]*
Les foncteurs $\mathrm{N}_*(-;\mathbb{Z})$ resp. $\mathrm{N}^*(-;\mathbb{Z})$ sont à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{E}$-cogèbres resp. $\mathcal{E}$-algèbres différentielles graduées.

La preuve de (4.2) suit une idée qui est due à Smirnov [45]. En effet, le foncteur N_* est de manière tautologique à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{Z}$-cogèbres différentielles graduées, où $\mathcal{Z}$ est l'opérade des coendomorphismes naturels de N_*. Explicitement, $\mathcal{Z}(r)$ est donné par l'ensemble des éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{N}_*, \mathrm{N}_*^{\otimes r})$ qui sont de degré positif ou nul et qui sont naturels en les ensembles simpliciaux. Pour montrer (4.2), il suffit alors d'exhiber un morphisme d'opérades $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$. Un théorème de Dold [20] dit que $\mathcal{Z}$ est faiblement équivalent à l'opérade qui agit sur les algèbres commutatives. Par conséquent, le morphisme d'opérades $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ que nous allons expliciter est une équivalence faible.

Nous allons en fait expliciter deux équivalences faibles : $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}$. Il s'avère que le premier morphisme d'opérades est surjectif et le second est injectif. L'opérade $\mathcal{X}$, également étudiée par McClure et Smith [38], est définie comme suit : $\mathcal{X}(r)_d$ est le groupe abélien libre de base l'ensemble des surjections non-dégénérées $\{1,\ldots,r+d\} \to \{1,\ldots,r\}$. Une surjection ϕ est non-dégénérée si $\phi(i) \neq \phi(i+1)$ pour tout i. En particulier, $\mathcal{X}(r)_0$ s'identifie au groupe abélien libre de base $\mathfrak{S}_r$. La multiplication $\mathcal{X}(k)\otimes\mathcal{X}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{X}(i_k) \to \mathcal{X}(i_1+\cdots+i_k)$ est définie par un procédé de substitution qui étend de manière naturelle la multiplication de l'opérade des permutations, cf. [9, 1.2.4]. Il est à noter que notre convention concernant l'action des groupes symétriques est opposée ici à celle utilisée précédemment, i.e. les $\mathcal{X}(r)$ sont des $\mathfrak{S}_r$-modules *à gauche.*

Nous désignons l'inclusion $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Z}$ par AW puisqu'elle généralise la diagonale d'Alexander-Whitney. Cette inclusion est également étudiée dans [38]. Etant donnée une surjection $\phi \in \mathcal{X}(r)_d$, la transformation naturelle $AW(\phi)$:

$N_* \to N_{*+d}^{\otimes r}$ est définie sur tout simplexe x par

$$x \mapsto \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{r+d} = |x|} \pm x(\phi_i^{-1}(1)) \otimes x(\phi_i^{-1}(2)) \otimes \cdots \otimes x(\phi_i^{-1}(r))$$

où par $\phi_i^{-1}(k)$ nous désignons la réunion des intervalles (i_{s-1}, i_s) tels que $\phi(s) = k$. Le signe est spécifié dans [9, 2.2].

Par exemple, la surjection $(1,2) \in \mathcal{X}(2)_0$ définit de cette manière la diagonale d'Alexander-Whitney $AW(1,2) : N_* \to N_*^{\otimes 2}$, et la surjection $(1,2,1,2,\dots) \in \mathcal{X}(2)_d$ définit une diagonale supérieure $AW(1,2,1,2,\dots) : N_* \to N_{*+d}^{\otimes 2}$ dont le dual sur les cochaînes induit le $\cup_d$-produit de Steenrod.

Il est capital que l'inclusion $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Z}$ respecte les structures d'opérade et qu'en plus le sous-module $\mathcal{X}$ est stable par la différentielle de $\mathcal{Z}$. On peut expliciter cette différentielle pour les générateurs de $\mathcal{X}$. Etant donnée une surjection $\phi = (\phi(1), \dots, \phi(r+d)) \in \mathcal{X}(r)_d$, sa différentielle $d\phi$ contient toutes les surjections $(\phi(1), \dots, \widehat{\phi(i)}, \dots, \phi(r+d)), 1 \leq i \leq r+d$, qui sont non-dégénérées et appartiennent à $\mathcal{X}(r)_{d-1}$. Le signe est spécifié dans [9, 1.2.3]. Ce signe repose de manière essentielle sur le fait que chaque surjection $\phi \in \mathcal{X}(r)_d$ contient exactement d *césures*. En effet, dans $\phi = (\phi(1), \dots, \phi(r+d))$, une césure est introduite après chaque valeur $\phi(i)$ pour laquelle il existe un $j > i$ tel que $\phi(i) = \phi(j)$. Par exemple, pour $(1,3,2,1,4,2,1) \in \mathcal{X}(4)_3$, nous obtenons trois césures $(1|3,2|1|4,2,1)$. Il s'ensuit que les valeurs qui ne sont pas suivies d'une césure, forment une permutation.

Venons à l'autre morphisme d'opérades $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$, que nous appelons morphisme de réduction de table. En effet, un générateur $\sigma = (\sigma_0|\sigma_1|\dots|\sigma_d) \in \mathcal{E}(r)_d$ peut également être considéré comme une suite de valeurs ayant d césures. Nous disons qu'une surjection $\phi \in \mathcal{X}(r)_d$ s'obtient de σ par *réduction de table*, si pour tout $i = 1, \dots, d$, les valeurs de ϕ comprises entre la $(i-1)^{eme}$ et la i^{eme} césure forment une sous-suite des valeurs de σ_i de sorte que les valeurs "sautées" apparaissent dans ϕ avant la $(i-1)^{eme}$ césure sans être suivies d'une césure. Par définition, $TR(\sigma)$ est la somme de toutes les surjections (non-dégénérées) obtenues de σ par réduction de table, les signes étant positifs.

Théorème 4.3. *[9, 1.3.2, 1.6.1]*
Le morphisme de réduction de table $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ est un morphisme surjectif d'opérades filtrées. C'est une équivalence faible induisant à chaque étage de la filtration une équivalence faible $\mathcal{F}_n TR : \mathcal{F}_n\mathcal{E} \to \mathcal{F}_n\mathcal{X}$. En particulier, $\mathcal{F}_n\mathcal{X}$ est une opérade de chaînes de type E_n pour $1 \leq n \leq \infty$.

La filtration $\mathcal{F}_n\mathcal{E}$ est induite par la filtration de Smith de l'opérade $W\mathfrak{S}$ de Barratt-Eccles, i.e. $\mathcal{F}_n\mathcal{E} = N_* W_n \mathfrak{S}$. Le théorème (2.7) montre alors que $\mathcal{F}_n\mathcal{E}$ est une operade de chaînes de type E_n. La filtration $\mathcal{F}_n\mathcal{X}$ est définie par le procédé décrit en (2.3). La préservation des structures cellulaires provient alors du fait que le morphisme de réduction de table respecte les structures d'opérade et induit un isomorphisme $\mathcal{E}(2) \cong \mathcal{X}(2)$, voir [9, 1.6.5] pour une preuve directe. Explicitement, $\mathcal{F}_n\mathcal{X}$ contient parmi les surjections de $\mathcal{X}$ toutes celles dont les sous-suites à deux valeurs fixes n'ont pas plus que n variations. Ceci est à nouveau une filtration "sphérique", étant donné, que le modèle de chaînes $\mathcal{X}(2)$ de la sphère de dimension infinie contient comme générateurs de degré 0 l'ensemble $\{(1,2),(2,1)\}$, comme générateurs de degré 1 l'ensemble $\{(1,2,1),(2,1,2)\}$, etc. McClure et Smith [38] montre la dernière partie de (4.3) sans faire appel à l'opérade de Barratt-Eccles, mais en utilisant l'opérade $\mathcal{K}$ et théorème (2.5). Dans un travail ultérieur, nous allons montrer que le morphisme de réduction de table $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ admet une section dans la catégorie des modules différentiels gradués. [9, 1.4.2] en contient juste ce qu'il faut pour montrer que TR est surjectif. Cette section est une sorte de morphisme d'Eilenberg-MacLane associé à la décomposition suivante :

Proposition 4.4. *L'opérade de Barratt-Eccles admet une décomposition en prismes subordonnée à l'ensemble des générateurs de l'opérade des surjections.*

En effet, toute surjection $\phi \in \mathcal{X}(r)$ définit un prisme

$$\Delta[m_1 - 1] \times \cdots \times \Delta[m_r - 1] \to \mathrm{W}\mathfrak{S}(r)$$

où m_k est la multiplicité de la valeur k dans ϕ et où le sommet $(i_1 - 1, \ldots, i_r - 1)$ du prisme standard est appliqué sur la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ définie comme suit: la suite $(\sigma(1), \ldots, \sigma(r))$ est la sous-suite de $(\phi(1), \ldots, \phi(r+d))$ obtenue en prenant la i_k^{eme} occurence de la valeur k pour $k = 1, \ldots, r$. Par exemple, les surjections $(1,2,1,3,1),(1,2,3,2,1),(1,3,1,2,1) \in \mathcal{F}_2\mathcal{X}(3)_2$ définissent de cette manière un hexagone dans $\mathrm{W}_2\mathfrak{S}(3)_2$ qu'on peut assimiler à l'hexagone de Yang-Baxter (décomposé en deux triangles et un carré) qui a servi de manière essentielle dans la preuve de (3.1).

L'intérêt de l'opérade des surjections provient du fait que le deuxième étage de la filtration $\mathcal{F}_2\mathcal{X}$ agit canoniquement sur les cochaînes de Hochschild d'une algèbre associative. Cette action a été décrite par McClure et Smith [38]. La surjection $(1,2) \in \mathcal{X}(2)_0$ induit le $\cup$-produit en cohomologie de Hochschild. Les surjections $(1,2,1,3,1,\ldots,r,1) \in \mathcal{X}(r)_{r-1}$ induisent les opérations "brace" de Getzler et Kadeishvili. Gerstenhaber et Cohen ont établi dans des travaux indépendants que la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative et l'homologie d'un espace de lacets doubles ont essentiellement la même structure algébrique, celle d'une algèbre de Gerstenhaber. Ce fait était à la base de la conjecture de Deligne, à savoir l'existence d'une E_2-action sur les cochaînes de Hochschild d'une algèbre associative. Le théorème (4.3) en donne une preuve constructive.

Références

[1] C. Berger – *Une version effective du théorème de Hurewicz*, Thèse de doctorat, Grenoble (1991).

[2] C. Berger – *Un modèle simplicial fibrant de l'espace des chemins*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, t. **315** (1992), 193–196.

[3] C. Berger – *Un groupoïde simplicial comme modèle de l'espace des chemins*, Bull. Soc. Math. France **123** (1995), 1–32.

[4] C. Berger – *Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1125–1157.

[5] C. Berger – *Combinatorial models for real configuration spaces and E_n-operads*, Contemp. Math. **202** (1997), 37–52.

[6] C. Berger et J. Huebschmann – *A comparison of the geometric bar and W-constructions*, J. Pure Appl. Alg. **131** (1998), 109–123.

[7] C. Berger – *Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic* 3-*type of space*, Contemp. Math. **227** (1999), 49–66.

[8] C. Berger – *A Cellular Nerve for Higher Categories*, à paraître dans Adv. in Math. (2001), disponible à http://math.unice.fr/$\sim$cberger.

[9] C. Berger et B. Fresse – *Combinatorial operad actions on cochains*, soumis au Math. Camb. Phil. Soc. (2001), disponible à http://math.unice.fr/$\sim$cberger.

[10] C. Berger et I. Moerdijk – *On the homotopy theory of operads in symmetric monoidal model categories*, en préparation.

---

[11] J. Baez et J. Dolan – *Categorification*, Contemp. Math. **230** (1998), 1–36.

[12] C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R. Schwänzl et R. Vogt – *Iterated monoidal categories*, à paraître dans Adv. in Math. (2001).

[13] M. G. Barratt et P. J. Eccles – Γ^+-*structures*, Topology **13** (1974), 25–45, 113–126, 199–207.

[14] M. A. Batanin – *Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak n-category*, Adv. in Math. **136** (1998), 39–103.

[15] M. A. Batanin et R. Street – *The universal property of the multitude of trees*, J. Pure Appl. Alg. **154** (2000), 3–13.

[16] H.-J. Baues – *Geometry of loop spaces and the cobar-construction,* Mem. Amer. Math. Soc. **230** (1980).

[17] J. M. Boardman et R. M. Vogt – *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lect. Notes Math. **347** (1973).

[18] M. Brinkmeier – *On Milgram's non-operad*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 1427–1438.

[19] F. R. Cohen – *The homology of C_{n+1}-spaces*, Lect. Notes Math. **533**, (1976), 207–351.

[20] A. Dold – *Über die Steenrodschen Kohomologieoperationen*, Ann. of Math. **73** (1961), 258–294.

[21] G. Dunn – *Tensor product of operads and iterated loop spaces*, J. Pure Appl. Alg. **50** (1988), 237–258.

[22] W. Dwyer et D. M. Kan – *Homotopy theory and simplicial groupoids*, Proc. Koninklije Acad. van Weteenschappen **A 87(4)** (1984), 379–385.

[23] Z. Fiedorowicz – *The symmetric bar-construction*, à paraître dans J. Pure Appl. Alg. (2001).

[24] R. Fox et L. Neuwirth – *The braid groups*, Math. Scand. **10** (1962), 119–126.

[25] R. Gordon, A. J. Power et R. Street – *Coherence for Tricategories*, Mem. Amer. Math. Soc. **558** (1995).

[26] V. Hinich – *Homological algebra of homotopy algebras*, Comm. in Alg. **25** (1997), 3291–3323.

[27] A. Joyal – *Disks, duality and θ-categories*, preprint (1997).

[28] A. Joyal et R. Street – *Braided tensor categories*, Adv. in Math. **102** (1993), 20–78.

[29] A. Joyal et M. Tierney – *Algebraic homotopy types*, manuscript (1993).

[30] A. Joyal et M. Tierney – *On the theory of path groupoids*, J. Pure Appl. Alg. **149** (2000), 68–100.

[31] D. M. Kan – *A combinatorial definition of homotopy groups*, Ann. of Math. **67** (1958), 282–312.

[32] D. M. Kan – *On homotopy theory and c.s.s. groups*, Ann. of Math. **68** (1958), 38–53.

[33] T. Kashiwabara – *On the Homotopy Type of Configuration Complexes*, Contemp. Math. **146** (1993), 159–170.

[34] T. Leinster – *Ten definitions of weak n-category*, à paraître dans Th. Appl. Categ. (2001).

[35] O. Leroy – *Sur une notion de* 3*-catégorie adaptée à l'homotopie*, prépub. AGATA, Montpellier (1994).

[36] M. Mandell – E_∞*-algebras and* p*-adic homotopy theory*, Topology **40** (2001), 43–94.

[37] J. P. May – *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lect. Notes Math. **271** (1972).

[38] J. McClure et J. H. Smith, – *Multivariable cochain operations and little* n*-cubes*, preprint (2001), disponible à http://arXiv.org/abs/math.QA/0106024.

[39] J. Milgram – *Iterated loop spaces*, Ann. of Math. **84** (1966), 386–403.

[40] D. G. Quillen – *Homotopical algebra*, Lect. Notes Math. **43** (1967).

[41] C. Rezk, S. Schwede et B. Shipley – *Simplicial structures on model categories and functors*, à paraître dans Amer. J. Math. (2001).

[42] G. Segal – *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. IHES Paris **34** (1968), 105–112.

[43] G. Segal – *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), 293–312.

[44] C. Simpson – *A closed model structure for* n*-categories,* n*-stacks and generalized Seifert-Van Kampen*, alg-geom 9704006.

[45] V. Smirnov – *Homotopy theory of coalgebras*, Math. USSR-Izv. **27** (1986), 575–592.

[46] J. H. Smith – *Simplicial Group Models for* $\Omega^n \mathrm{S}^n X$, Israel J. of Math. **66** (1989), 330–350.

[47] Z. Tamsamani – *Sur les notions de* n*-catégorie et* n*-groupoïde non-strictes via les ensembles multi-simpliciaux*, K-theory **16** (1999), 51–99.

[48] R. W. Thomason – *Cat as closed model category*, Cah. Top. Géom. Diff. Cat. **21** (1980), 305–324.

[49] R. M. Vogt – *Homotopy limits and colimits*, Math. Z. **134** (1973), 11–52.

[50] F. Waldhausen – *On the construction of the Kan loop group*, Doc. Math. **1** (1996), 121–126.