Feuille d'exercices n^{o}7

RÉSIDUS.

1. Soit $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe avec U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0.

1.a. Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe sur U si et seulement si $|f(z)|$ reste bornée quand $z \longrightarrow z_0$.

1.b. Montrer que f a un pôle en z_0 si et seulement si $|f(z)| \to \infty$ quand $z \longrightarrow z_0$.

1.c. Les cas 1.a et 1.b recouvrent-ils tous les cas possibles ?

1.d. En supposant U simplement connexe, montrer que $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ si et seulement si f admet une primitive complexe dans $U\backslash\{z_0\}$.

2.a. Montrer que si $h_1(z) = (z-z_0)h(z)$ est holomorphe dans un voisinage U de z_0 pour une fonction holomorphe $h : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Res}(h, z_0) = h_1(z_0)$.

2.b. Calculer $\mathrm{Res}(\frac{f}{g}, z_0)$ pour deux fonctions f, g holomorphes dans un voisinage de z_0 en supposant que g possède une racine simple en z_0.

2.c. Calculer $\mathrm{Res}(\mathrm{cotan}(z), 0)$. Qu'en est-il des autres résidus de $\mathrm{cotan}(z)$?

2.d. Calculer $\mathrm{Res}\left(\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}, 0\right)$ pour des entiers naturels $k \leq n$.

3. On fixe un entier naturel $n \geq 2$, et un réel $R > 0$.

3.a. Montrer que les intégrales $\int_{[0,R]} \frac{dz}{1+z^n}$ et $\int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{n}}]} \frac{dz}{1+z^n}$ sont proportionnelles.

3.b. Montrer que pour le chemin curviligne $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$, la limite $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^n}$ est nulle.

3.c. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

4.a. Soit $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où S est une partie discrète de $\mathbb{C}$. Montrer que s'il existe une suite de rayons $(R_n)_{n\geq1}$ tendant vers ∞ telle que les cercles γ_{R_n} de rayon R_n ne rencontrent pas S, et telle que $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_{R_n}} f(z)dz = 0$, alors la somme $\sum_{z\in S} \mathrm{Res}(f, z)$ existe et est nulle.

4.b. On pose $f(z) = \frac{z}{2}\mathrm{cotan}(\frac{z}{2}) = \sum_{n\geq0}(-1)^n \frac{B_{2n} z^{2n}}{(2n)!}$. Déterminer pour $k \geq 0$, les pôles et les résidus de $f_k(z) = \frac{f(z)}{z^{k+1}}$.

4.c. Montrer que les f_k, $k \geq 1$, vérifient l'hypothèse de 4.a. En déduire la somme $\zeta(2k) = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^{2k}}$ en fonction du nombre de Bernoulli B_{2k}.

4.d. Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.