Feuille d'exercices n^{o}6

FONCTIONS ANALYTIQUES ET INVARIANCE HOMOTOPIQUE.

1. Montrer à l'aide du théorème de Rouché qu'un polynôme complexe $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ possède exactement n racines complexes (comptées avec leurs ordres de multiplicité), situées toutes dans le disque fermé $\bar{D}_R(0)$ de rayon $R = |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$.

2. Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, soit le lacet $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{2\pi i n t}$.

Montrer que si $n \neq m$, alors γ_n et γ_m ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que tout lacet γ dans $\mathbb{C}^*$ est homotope à un lacet à valeurs dans le cercle-unité S^1. En déduire une interprétation géométrique de l'indice $Ind_\gamma(0)$.

3. Montrer que pour un ouvert U de $\mathbb{C}$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) tout lacet γ dans U est contractile dans U;
(b) pour tout couple (γ_1, γ_2) de chemins dans U ayant mêmes extrémités, il existe une homotopie (rel. aux extrémités) qui les relie dans U.

4. Soient $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $V = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $W = \mathbb{C}\backslash\{\lambda i \in \mathbb{C} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 1\}$.

4.a. Montrer que $z \mapsto z^2$ définit une bijection holomorphe $V \to U$.

4.b. Montrer que $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une bijection holomorphe $W \to U$.

4.c. En déduire que W est simplement connexe et que $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ admet une primitive sur W s'annulant en 0, qu'on notera F.

4.d. Montrer que la fonction $z \mapsto F(z) + F(\frac{1}{z})$ est constante sur les composantes connexes de son domaine de définition. Calculer ces constantes.

4.e. Montrer que $F(z) = \frac{1}{2i} \ln_0 \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ sur W.

5.a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1+z^4}{1+z^6}$.

5.b. Pour un réel $R > 0$, soit le demi-cercle $\epsilon_R : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto Re^{\pi i t}$. Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\epsilon_R} \frac{1+z^4}{1+z^6} dz = 0.$$

5.c. Soit γ_R le lacet obtenu par concaténation du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle ϵ_R. Calculer la valeur des intégrales

$$\int_{\gamma_R} \frac{1+z^4}{1+z^6} dz \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^4}{1+x^6} dx.$$