Feuille d'exercices n^{o}2

INTÉGRALE DE CAUCHY

1. Soient $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{2\pi it}$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{4\pi it}$ et

$$\gamma_3 : [0,2] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \le t \le 1; \\ \gamma_1(t-1) & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

1.a. Calculer

$$\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z} \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

1.b. Calculer

$$\int_{[1,i]} \frac{dz}{z} + \int_{[i,-1]} \frac{dz}{z} + \int_{[-1,-i]} \frac{dz}{z} + \int_{[-i,1]} \frac{dz}{z}.$$

2. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{2\pi it}$. Calculer les intégrales :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^n dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{6z^2 - 5z + 1}.$$

3. Pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 on pose :

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

3.a. Calculer $l(\gamma)$ pour les courbes paramétrées des exercices précédents. Interprétation géométrique ?

3.b. Montrer que pour $\|f\|_\gamma = \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$ on a :

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \le l(\gamma) \|f\|_\gamma.$$

4. Soient $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin de classe C^1 et f, g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit G une primitive complexe de g sur U.

4.a. Montrer que

$$\int_\gamma f(z) g(z) dz = [f(z) G(z)]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} - \int_\gamma f'(z) G(z) dz.$$

4.b. Qu'en déduire si γ est un lacet ?