Feuille d'exercices n^{o}1

Topologie de $\mathbb{C}$ et Fonctions holomorphes

1. On note $D_R(w) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-w| < R\}$ le disque ouvert de centre $w \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$, et $\overline{D}_R(w)$ le disque fermé de centre $w \in \mathbb{C}$ et de rayon $R \geq 0$.

1.a. Rappeler les définitions des ouverts, fermés, connexes, compacts de $\mathbb{C}$.

1.b. Déterminer la nature topologique de $\bigcap_{n>0} D_{\frac{1}{n}}(0)$, de $\bigcup_{n>0} \overline{D}_{\frac{n-1}{n}}(0)$, de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_{\frac{1}{2}}(n)$ et de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{D}_{\frac{1}{2}}(n)$.

1.c. Montrer que pour tous $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'ensemble $w_1 D_R(w_2) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = w_1 z', z' \in D_R(w_2)\}$ constitue un disque ouvert dont en déterminera le centre et le rayon.

2. Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ le cercle-unité de $\mathbb{C}$.

2.a. Montrer que $\mathbb{C} \backslash S^1$ est réunion disjointe de deux ouverts U_0 et U_1 de $\mathbb{C}$.

2.b. Caractériser l'appartenance $z \in U_i$, $i = 0, 1$, à l'aide du module $|z|$.

2.c. Montrer que pour toute application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) \in U_0$ et $\gamma(b) \in U_1$, il existe $t \in]a, b[$ tel que $\gamma(t) \in S^1$.

2.d. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{it}$ est un homéomorphisme local, i.e. que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ contenant t tel que la restriction $f_{|U} : U \to f(U)$ est un homéomorphisme.

3. On identifiera $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par l'homéomorphisme $a + ib \mapsto (a, b)$. Déterminer parmi les matrices réelles $A \in M_2(\mathbb{R})$ celles dont l'endomorphisme associé $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspond à l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (a + ib)z$. En déduire un isomorphisme de groupes entre $SO(2)$ et S^1.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ est holomorphe. En déduire que toute fonction polynomiale $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ est holomorphe.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle de déterminant 1, et supposons $c \neq 0$. On considère l'application $\phi : \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

Montrer que ϕ est holomorphe. Calculer sa dérivée. Montrer que $\phi = f_4 f_3 f_2 f_1$ pour $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ $\quad f_2(z) = \frac{1}{z}$, $\quad f_3(z) = -\frac{z}{c^2}$, $\quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}$. En déduire que ϕ conserve les "angles".

6. Une fonction réelle $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite *harmonique* si la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ s'annule sur U.

Montrer que parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques. Montrer que pour toute fonction harmonique f sur $U \subset \mathbb{R}^2$, la fonction $g(x + iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est holomorphe sur U.