Contrôle du 9 décembre 2014
Durée: 1h00. Tous documents interdits.

1. Connexité et point fixe. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x = y\}$.

1.a. Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$. Montrer qu'une partie connexe Γ de $\mathbb{R}^2$ qui ne rencontre pas Δ est forcément contenue dans une composante connexe de $\mathbb{R}^2 - \Delta$.

1.b. Soit Γ une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ qui ne rencontre pas Δ. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - y$ est à signe constant sur Γ. En déduire que si Γ est contenu dans une bande $\mathbb{R} \times [-N,N]$ alors Γ est contenu soit dans $[-N,\infty[\times[-N,N]$ soit dans $]-\infty,N] \times [-N,N]$.

1.c. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est connexe. Montrer que f possède un point fixe si et seulement si Γ_f rencontre Δ. En déduire (à l'aide de **2.b**) que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue *et bornée* alors f admet un point fixe.

2. Mesures à support ponctuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la tribu des parties boréliennes sur $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\delta_x : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de Dirac définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

2.a. Montrer que δ_x est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

2.b. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe un ouvert U_μ maximal de $\mathbb{R}^n$ de mesure $\mu(U_\mu) = 0$. Le *support de la mesure* μ est défini par $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n \backslash U_\mu$. Montrer que $\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\}$.

2.c. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support ponctuel $\{x\}$. Montrer que $\mu = \lambda\delta_x$ pour un réel $\lambda \geq 0$. *Indication:* On pourra montrer que pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ contenant x on a $\mu(A) = \mu(\{x\})$ en calculant $\mu(A \backslash \{x\})$.

Barème indicatif: 12 + 8