UNSA Mesure et Topologie **L3 Maths 2015-2016**

Contrôle n^{o}1 du 6 octobre 2015

Durée: 45 minutes

1. Convergence dans un espace métrique et adhérence.

Soit A une partie d'un espace métrique (E, d), $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de A et $x \in E$ un point quelconque.

1.a. Montrer que la suite (x_n) converge vers x dans (E, d) si et seulement si toute boule ouverte centrée en x et de rayon ϵ contient tous les termes de la suite (x_n) à partir d'un certain rang N_ϵ.

1.b. Rappeler la définition de l'adhérence $\bar{A}$ de A. Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

1.c. On dit que $x \in E$ est un point d'accumulation de (x_n) si toute boule ouverte centrée en x contient une infinit de termes de la suite. Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) s'identifie à l'intersection

$$\bigcap_{k\geq 0} \overline{X_k} \quad \text{où} \quad X_k = \bigcup_{n\geq k} \{x_n\}.$$

2. Intérieur. Soient A, B deux parties d'un espace topologique E. Rappeler la définition de l'intérieur $\mathrm{Int}(A)$ de A et montrer les propriétés suivantes:

2.a. Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

2.b. $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

2.c. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

3. Points isolés. On dit qu'un point $x \in A$ d'un espace topologique E est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert U de E tel que $A \cap U = \{x\}$.

3.a. En considérant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme des parties de $\mathbb{R}$ montrer que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés mais qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

3.b. On pose $\alpha(A) = \overline{\overset{o}{A}}$, i.e. $\alpha(A)$ est l'adhérence de l'intérieur de A. Montrer que si A est ouvert (resp. fermé) alors $A \subset \alpha(A)$ (resp. $A \supset \alpha(A)$).

3.c. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $A = \alpha(A)$ alors A est fermé et ne contient aucun point isolé.

Barême indicatif : 3 + 3 + 4