Feuille d'exercices n°5

1. Sous-espaces affines et classes résiduelles. On rappelle qu'un espace affine réel est un couple (E, V) formé d'un ensemble E et d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V muni d'une application $\Theta^E : E \times E \to V : (x, y) \mapsto \vec{xy}$ telle que

(i) $\Theta^E_x : \{x\} \times E \to V$ est bijective pour tout $x \in E$;

(ii) $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$ pour tous $x, y, z \in E$.

Un espace affine (F, W) est un sous-espace affine de (E, V) si F est une partie de E et W un sous-espace vectoriel de V de sorte que $\Theta^F = \Theta^E|_{W \times W}$. Deux sous-espaces affines (F_1, W_1) et (F_2, W_2) de (E, V) sont dits parallèles si les deux sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 de V coïncident.

1.a. Rappeler la structure d'espace affine de $\mathbb{R}^n$.

1.b. Montrer qu'il y a bijection entre les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ et les classes résiduelles $x + V$ où V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Rappeler les différents sous-espaces affines de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

1.c. En déduire que deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ sont parallèles si et seulement si les classes résiduelles correspondantes sont des classes résiduelles par rapport au même sous-espace vectoriel.

2. Coordonnées barycentriques et convexité. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine réel E.

2.a. Montrer que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + y + z = 1$, il existe un et un seul point X de E tel que $\vec{XX} = x\vec{XA} + y\vec{XB} + z\vec{XC}$. On écrit $X = xA + yB + zC$ et on dit que (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques de X dans le repère affine (A, B, C) de E.

2.b. Montrer que pour toute droite affine D passant par A mais ne passant ni par B ni par C, le rapport $\frac{y}{z}$ d'un point $xA + yB + zC$ sur D reste constant. Quelle est la signification géométrique du signe de ce rapport ? Que signifie $\frac{y}{z} = 1$? Comment construire géométriquement le point $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ de E ?

2.c. Décrivez géométriquement l'ensemble des points $xA + yB + zC$ de E tels que $z \geq 0$. En déduire une description de l'enveloppe convexe des points A, B, C en termes des coordonnées barycentriques.

3. Droite projective réelle et birapport réel. On rappelle qu'une *homographie réelle* est une *transformation projective de la droite projective réelle* $f_{a,b,c,d} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Sous l'identification $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ elle s'écrit

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$$

en utilisant les règles de calcul habituelles pour ∞. Le *birapport réel* est défini par

$$[x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} \text{ si } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ sont tous distincts.}$$

3.a. Montrer que $f_{a,b,c,d} = f_{a',b',c',d'}$ si $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

3.b. Montrer que $[x_1, x_2; x_3, x_4] = f(x_4)$ où f est l'unique homographie réelle qui applique (x_1, x_2, x_3) sur $(\infty, 0, 1)$. En déduire la formule $[x_1, x_2; x_3, x_4] = [g(x_1), g(x_2); g(x_3), g(x_4)]$ pour toute homographie réelle g.

3.c. On se place dans un plan affine réel, et on considère quatre droites affines D_i, $i = 1, 2, 3, 4$ s'intersectant en un point O, et deux droites affines parallèles D_x, D_y créant huit intersections distinctes $x_i = D_i \cap D_x$ et $y_i = D_i \cap D_y$. Montrer qu'il existe une homographie réelle (une "persepective" de centre O) qui applique x_i sur y_i pour $i = 1, 2, 3, 4$. En déduire l'identité $[x_1, x_2; x_3, x_4] = [y_1, y_2; y_3, y_4]$. Faites un dessin ! Généralisez !

4. Droite projective complexe et birapport complexe.

4.a. Formuler les énoncés analogues à **3.a-b** pour les *homographies complexes* et le *birapport complexe*.

4.b. Montrer que si $z_1 \neq z_4$ alors $arg([z_1, z_2; z_3, z_4]) \equiv \alpha - \beta \mod 2\pi$ où α est l'angle orienté en z_3 entre les vecteurs $z_1 - z_3$ et $z_2 - z_3$, et β est l'angle orienté en z_4 entre les vecteurs $z_1 - z_4$ et $z_2 - z_4$.

4.c. Rappeler pourquoi un nombre complexe est réel si et seulement si son argument vaut 0 ou $\pi \mod 2\pi$. En déduire (à l'aide de **4.b**) que le birapport complexe $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ est réel si et seulement si soit z_1, z_2, z_3, z_4 sont alignés soit il existe un cercle (nécessairement unique) contenant z_1, z_2, z_3, z_4.

4.d. En déduire que toute homographie complexe applique droite ou cercle sur droite ou cercle.

5. Droite projective sur un corps fini.

5.a. En faisant agir le groupe $PGl_2(\mathbb{F}_p)$ des transformations projectives sur la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ construire un morphisme de groupes injectif

$$PGl_2(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{p+1}.$$

5.b. Montrer que c'est un isomorphisme pour $p = 2$ et $p = 3$.

MOTS-CLÉS : Sous-espaces affines, coordonnées barycentriques, droite projective, birapport.