Feuille d'exercices n°3

1. Groupes d'ordre 12, 15 et 30.

1.a. Montrer qu'il n'y a à isomorphisme près que deux groupes abéliens d'ordre 12. Montrer que D_{12}, $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_3 \rtimes \mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont trois groupes non-abéliens d'ordre 12 qui sont 2-à-2 non-isomorphes. Indication : déterminer le nombre de 2- et 3-Sylow pour ces trois groupes.

1.b. Montrer que tout groupe d'ordre 15 est cyclique.

1.c. Montrer qu'il existe quatre morphismes de groupes $\rho_i : \mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$. Indication : On pourra utiliser que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \cdot)^\times \cong \mathbb{F}_3^\times \times \mathbb{F}_5^\times$, où $A^\times$ désigne le groupe des éléments inversibles de l'anneau A.

1.d. Soit G un groupe d'ordre 30. On note $n_2(G)$, $n_3(G)$, resp. $n_5(G)$ le nombre de 2-, 3, resp. 5-Sylow de G. Montrer que G possède des éléments d'ordre 2, 3 et 5. Montrer que si $n_3(G) \neq 1$ alors G possède 20 éléments d'ordre 3. Montrer que si $n_5(G) \neq 1$ alors G possède 24 éléments d'ordre 5. En déduire que $n_3(G) = 1$ ou $n_5(G) = 1$. Conclure enfin que $n_3(G) = n_5(G) = 1$.

1.e. Quelles sont les valeurs possibles pour $n_2(G)$ d'après le théorème de Sylow ? Déterminer $n_2(G_i)$ pour les quatre groupes $G_i = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_{\rho_i} \mathfrak{S}_2$ d'ordre 30. En déduire qu'ils sont non-isomorphes. Y a t-il d'autres groupes d'ordre 30 ?

2. Groupes d'ordre pq et p^2q. Soient p et q deux nombres premiers distincts tels que $q \not\equiv 1 \mod p$.

2.a. Montrer que tout groupe d'ordre pq est cyclique.

2.b. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q est abélien.

3. Groupes simples. Un groupe est dit *simple* s'il ne possède pas d'autres sous-groupes distingués que lui-même et le sous-groupe trivial.

3.a. Montrer qu'un groupe abélien fini est simple si et seulement s'il est d'ordre premier.

3.b. Montrer qu'un groupe simple G d'ordre n non-premier vérifie $n_p(G) \neq 1$ pour tout diviseur premier p de n.

3.c. Montrer qu'un groupe d'ordre 56 ne peut pas être simple.

3.d. On considère le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$. Déterminer $n_2(\mathfrak{A}_5), n_3(\mathfrak{A}_5)$ et $n_5(\mathfrak{A}_5)$. Déterminer les ordres possibles des éléments de $\mathfrak{A}_5$. En utilisant **1.b** (resp. **1.e**) montrer que $\mathfrak{A}_5$ ne possède pas de sous-groupes d'ordre 15 (resp. 30). Etudier les sous-groupes de $\mathfrak{A}_5$ d'ordre 6, 10 et 12. Conclure que $\mathfrak{A}_5$ est un groupe simple.

4. Groupes orthogonaux $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(3)$.

4.a. Montrer que $\mathrm{O}(2) \cong \mathrm{SO}(2) \rtimes \mathfrak{S}_2$. En déduire qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(2)$ est soit cyclique soit diédral.

4.b. Montrer que l'action canonique de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{R}^4$ par permutation des coordonnées définit un morphisme injectif de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{O}(4)$. Montrer que cette action peut être restreinte à $(1,1,1,1)^\perp \cong \mathbb{R}^3$ définissant ainsi un morphisme de groupes injectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{O}(3)$ qui se restreint en un morphisme de groupes injectif $\mathfrak{A}_4 \to \mathrm{SO}(3)$.

5. Groupes de réflexions et arrangements d'hyperplans.

5.a. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la réflexion s_H par rapport à H est donnée par la formule

$$s_H(x) = x - 2\frac{< x, x_H >}{< x_H, x_H >} x_H$$

où x_H désigne un vecteur non nul de $H^\perp$.

5.b. Montrer que le composé $s_{H_2}s_{H_1}$ de deux réflexions est une transformation orthogonale qui fixe $H_1 \cap H_2$ et qui induit sur $(H_1 \cap H_2)^\perp \cong \mathbb{R}x_{H_1} \oplus \mathbb{R}x_{H_2}$ une rotation d'angle le double de l'angle entre $\mathbb{R}x_{H_1}$ et $\mathbb{R}x_{H_2}$.

5.c. Un groupe de réflexions G est un *sous-groupe fini* de $\mathrm{O}(n)$ *engendré par des réflexions*. On lui associe l'*arrangement d'hyperplans* $\mathcal{A}_G = \{H \subset \mathbb{R}^n \,|\, s_H \in G\}$.

Montrer que si $H_1, H_2 \in \mathcal{A}_G$ alors $s_{H_1}(H_2) \in \mathcal{A}_G$. Montrer que $x \in \bigcap_{H \in \mathcal{A}_G} H$ si et seulement si $g(x) = x \quad \forall g \in G$.

On dit que l'arrangement $\mathcal{A}_G$ est *essentiel* et que le groupe de réflexions G est de *rang* n si $\bigcap_{H \in \mathcal{A}_G} H = 0$.

Donner une interprétation géométrique de l'ordre de $s_{H_2}s_{H_1}$ pour des réflexions $s_{H_1}, s_{H_2} \in G$.

5.d. Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est un groupe de réflexions de rang $n-1$ et expliciter son arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_n}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ dans le cas $n = 3$. Indication : dans l'inclusion canonique $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{O}(n)$ la transposition $(i\,j)$ de $\mathfrak{S}_n$ correspond à la réflexion par rapport à l'hyperplan $(e_i - e_j)^\perp$. Il suffit d'intersecter l'arrangement dans $\mathbb{R}^n$ ainsi obtenu avec $(1,\ldots,1)^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ pour obtenir un arrangement essentiel dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

5.e. On admet le résultat suivant : pour $H_1, \ldots, H_{k+1} \in \mathcal{A}_G$ on a equivalence entre

$$H_{k+1} \supset H_1 \cap \cdots \cap H_k \quad \text{et} \quad s_{H_{k+1}} \in < s_{H_1}, \ldots, s_{H_k} > \subset G.$$

En déduire que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n-1$ transpositions élémentaires $(1\,2), \ldots, (n-1\,n)$.

MOTS-CLÉS : Groupes finis, groupes simples, groupes orthogonaux, théorèmes de Sylow, réflexions, hyperplans.