Feuille d'exercices n°2

1. Classes de conjugaison, centre et groupes d'ordre p^2. Pour un groupe G on considère l'action de G sur G définie par conjugaison, i.e. à $g \in G$ on associe l'automorphisme $c_g : G \to G : x \mapsto gxg^{-1}$.

Les orbites de cette action s'appellent les *classes de conjugaison de G*, i.e. deux éléments $x, y \in G$ appartiennent à la même classe de conjugaison si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $c_g(x) = gxg^{-1} = y$.

Le *centralisateur* d'un $x \in G$ est défini par $C_{G,x} = \{g \in G \mid c_g(x) = x\}$.

Le *centre* de G est défini par $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : c_g(x) = x\}$.

1.a. Montrer que $C_{G,x}$ est un sous-groupe de G. Rappeler pourquoi $[G : C_{G,x}]$ calcule le cardinal de la classe de conjugaison contenant x. En déduire que le cardinal d'une classe de conjugaison de G divise l'ordre de G.

1.b. Montrer que le centre est le noyau d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(G)$. En déduire que le centre est un sous-groupe distingué de G. Montrer qu'il est abélien. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique (i.e. engendré par un seul élément) alors G est abélien, i.e. $G = Z(G)$ resp. $G/Z(G) = \{e_{G/Z(G)}\}$.

1.c. Montrer que le centre de G consiste précisément en les éléments de G dont la classe de conjugaison est singleton.

1.d. Soit G un p-groupe. Déduire de **1.a** que les cardinaux des classes de conjugaison de G sont des puissances de p. En déduire (à l'aide de **1.c**) que le centre d'un p-goupe possède plus d'un élément.

1.e. Déduire de **1.b** et **1.d** qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien. Qu'en est-il des groupes d'ordre p^3 ? Que peut-on dire du centre d'un groupe non abélien d'ordre p^3 ?

2. Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

2.a. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation cyclique $\sigma = (i_1 i_2 i_3 \cdots i_k)$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une permutation quelconque. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1}$ est la permutation cyclique $(\tau(i_1)\tau(i_2)\tau(i_3)\cdots\tau(i_k))$.

2.b. Déduire de **2.a** que si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ appartiennent à la même classe de conjugaison alors elles ont le même nombre d'orbites et il existe une bijection entre σ_1-orbites et σ_2-orbites qui préserve le cardinal des orbites.

2.c. Montrer que si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ ont le même nombre d'orbites tel qu'il existe une bijection entre σ_1-orbites et σ_2-orbites qui préserve le cardinal des orbites, alors σ_1 et σ_2 appartiennent à la même classe de conjugaison.

2.d. Déduire de **2.b** et **2.c** qu'il y a autant de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ que de *partitions* de n (i.e. de décompositions en entiers $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ avec $0 < k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_s$).

2.e. Énumérer les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ en explicitant leurs éléments.

3. Produit direct. Soit G un groupe avec sous-groupes distingués N et H tels que $N \cap H = \{e_G\}$ et $NH = G$.

3.a. Montrer que tout $x \in G$ s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $x = nh$ avec $n \in N$ et $h \in H$.

3.b. Montrer que $nh = hn$ pour tous $n \in N$ et $h \in H$. En déduire un isomorphisme de groupes $G \cong N \times H$.

On dit que G est le *produit direct* de N et de H.

3.c. Montrer qu'un groupe G d'ordre pq (avec p, q des nombre premiers distincts) est abélien si et seulement si G ne possède qu'un seul p-Sylow et un seul q-Sylow. Montrer que le cas échéant G est isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

3.d. Déterminer tous les 2- et 3-Sylow de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et de $\mathfrak{S}_3$.

4. Produit semi-direct. Soit G un groupe avec sous-groupes N, H tels que N distingué, $N \cap H = \{e_G\}$ et $NH = G$.

4.a. Montrer pour tout $x \in G$ l'unicité de l'écriture $x = nh$ avec $n \in N$ et $h \in H$. En déduire l'existence d'un morphisme de groupes surjectif $\phi : G \to H$ qui associe à $nh \in G$ l'élément $h \in H$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi) = N$.

On dit que G est le *produit semi-direct* de N et de H, et on note $G \cong N \rtimes H$.

4.b. Montrer l'existence d'un morphisme de groupes $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ associant à $h \in H$ l'automorphisme $\rho_h : N \to N : n \mapsto hnh^{-1}$; en particulier si $x_1 = n_1 h_1$ et $x_2 = n_2 h_2$ alors $x_1 x_2 = n_1 \rho_{h_1}(n_2) h_1 h_2$.

4.c. Montrer que $\mathfrak{S}_3 \cong \mathfrak{A}_3 \rtimes \mathfrak{S}_2$ en explicitant $\rho : \mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_3)$. Montrer que $\mathfrak{A}_3$ et $\mathfrak{S}_2$ sont cycliques.

4.d. Montrer que $D_{2n} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rtimes \mathfrak{S}_2$ en explicitant $\rho : \mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

5. Produit en couronne et 2-Sylow de $\mathfrak{S}_{2^k}$. On suppose que G est une sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$.

5.a. Montrer qu'il existe deux sous-groupes G_1 et G_2 de $\mathfrak{S}_{2m}$ isomorphes à G et tels que G_1 (resp. G_2) fixe les éléments $m+1, m+2, \ldots, 2m$ (resp. $1, 2, \ldots, m$). Montrer que $G_1 \cap G_2 = \{e_{\mathfrak{S}_{2m}}\}$ et que les éléments de G_1 commutent avec les éléments de G_2.

5.b. On note $\mathfrak{S}_2 \wr G$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2m}$ engendré par G_1, G_2 et la permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{2m}$ définie par $\tau(i) = i+m$ si $i \le m$ et $\tau(i) = i-m$ si $i > m$. Montrer que $\mathfrak{S}_2 \wr G$ est le produit semi-direct $(G_1 \times G_2) \rtimes \mathfrak{S}_2$ pour un automorphisme $\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Aut}(G_1 \times G_2)$ qu'on explicitera. En déduire que l'ordre de $\mathfrak{S}_2 \wr G$ et $2n^2$ où n est l'ordre de G.

5.c. Montrer que si 2 ne divise pas $\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$ (*) et si G est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_m$, alors $\mathfrak{S}_2 \wr G$ est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_{2m}$. Montrer que $m = 2^k$ vérifie (*).

5.d. Construire par récurrence sur k un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_{2^k}$. Quel est son ordre ?

MOTS-CLÉS : classe de conjugaison, centre, p-groupe, produit direct, produit semi-direct, sous-groupe de Sylow.