Feuille d'exercices n°1

1. Signature d'une permutation. La *signature* $sgn(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est définie par $sgn(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$ où $\nu(\sigma)$ est le nombre d'*inversions* de σ, i.e. le nombre de couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Une permutation est *paire* (resp. *impaire*) si sa signature est $+1$ (resp. -1).

1.a. Montrer que pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ le nombre $\nu(\sigma) + \nu(\tau) - \nu(\sigma\tau)$ est pair. En déduire que la signature $sgn : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes.

1.b. Montrer que $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ et que $sgn(\tau\sigma\tau^{-1}) = sgn(\sigma)$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$.

1.c. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes $\phi : G \to H$ est un sous-groupe distingué de G.

1.d. Le noyau de $sgn : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ se note $\mathfrak{A}_n$ et s'appelle le *groupe alterné*. Décrivez les classes résiduelles de $\mathfrak{A}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$. En déduire qu'il y a autant de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$ si $n \geq 2$.

2. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

2.a. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de $\mathfrak{S}_3$? Dresser une table contenant pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ ordre, signature et sous-groupe engendré.

2.b. Parmi ces sous-groupes engendrés lesquels sont distingués ? Dans le cas échéant déterminer le quotient de $\mathfrak{S}_3$ par ce sous-groupe distingué.

2.c. Donner la liste complète de tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$ en précisant s'il s'agit d'un sous-groupe distingué ou non.

3. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. On associe à chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ la partition suivante de $\{1,2,3,4\}$ en *σ-orbites* : deux éléments x, y appartiennent à la même σ-orbite si et seulement si $\sigma^k(x) = y$ pour un certain $k \geq 0$.

Une σ-orbite est dite *triviale* s'il s'agit d'un point fixe de σ. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ est dite *cyclique* si elle possède exactement une σ-orbite non triviale.

3.a. Montrer que l'ordre d'une permutation cyclique σ est égal au cardinal de sa σ-orbite non triviale. Combien de permutations cycliques d'ordre 2, resp. 3, resp. 4 y a-t-il dans $\mathfrak{S}_4$? Combien de permutations non cycliques ?

3.b. Montrer que tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ s'écrit comme produit de permutations cycliques à supports disjoints. En déduire une formule pour l'ordre de σ en termes de ses σ-orbites. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de $\mathfrak{S}_4$?

3.c. Montrer que l'ensemble des permutations non cycliques forme un sous-groupe distingué K_4 de $\mathfrak{S}_4$. Montrer que K_4 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

3.d. Construire un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ dont le noyau est K_4. *Indication :* on identifie $\{1,2,3\}$ à l'ensemble K_4^* des éléments non-neutres du groupe K_4, et on associe à tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ l'opération $K_4^* \to K_4^* : \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$ qu'on considère comme une permutation des trois éléments de K_4^*.

4. Les matrices de permutation. On considère le groupe linéaire $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels. A toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe la *matrice de permutation* $\phi_\sigma \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ dont le i^{eme} vecteur-colonne est le $\sigma(i)^{\text{eme}}$ vecteur de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

4.a. Montrer que $\phi : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \sigma \mapsto \phi_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif à valeurs dans le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales (Rappel : une matrice $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, i.e. si ${}^tA \cdot A = I_n$).

4.b. Montrer que $det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un morphisme de groupes.

4.c. Montrer que $sgn(\sigma) = det(\phi_\sigma)$. *Indication :* Montrer d'abord qu'il suffit d'établir l'identité pour les permutations cycliques (cf. **3.b**), ensuite qu'il suffit de l'établir pour les permutations cycliques d'ordre 2 (i.e. les transpositions).

4.d. En déduire un morphisme de groupes injectif $\mathfrak{A}_n \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

5. Les groupes diédraux. Le groupe diédral D_{2n} est le sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.a. Montrer que D_2 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et que D_4 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

5.b. Pour $n \geq 3$, en identifiant $\{1, 2, \ldots, n\}$ à $\{\rho^k(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), k = 1, \ldots, n\}$, construire un morphisme de groupes $D_{2n} \to \mathfrak{S}_n$ et montrer qu'il est injectif.

5.c. Soient H et N deux sous-groupes d'un groupe G, et supposons que N est distingué dans G. Montrer alors que $N \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que si $HN = G$ alors les deux indices $[G : N]$ et $[H : N \cap H]$ coïncident.

5.d. Appliquer ce qui précède au cas $G = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, $N = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $H = D_{2n}$. Montrer que dans ce cas $N \cap H$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. En déduire que, pour $n \geq 3$, D_{2n} est un groupe non-abélien d'ordre $2n$ (expliciter ses éléments).

MOTS-CLÉS : groupe, sous-groupe, (iso)morphisme de groupes, groupes symétrique, alterné, diédral, orthogonal.