Partiel du 3 novembre 2016
Durée: 1h30. Tout document interdit.

1. Topologie du plan. Soient les parties $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 0\}$ et $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq y \leq x^2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

1.a. (Question de cours) Comment peut-on caractériser les parties compactes de $\mathbb{R}^2$? Donner un exemple d'une partie ouverte non-connexe de $\mathbb{R}^2$.

1.b. Déterminer si D, H, resp. L est *ouvert*, *fermé*, *compact*, *connexe*.

1.c. Même question pour $\mathbb{R}^2 - D$, $\mathbb{R}^2 - H$, resp. $\mathbb{R}^2 - L$. Justifier !

1.d. Indiquer le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - D$, de $\mathbb{R}^2 - H$, de $\mathbb{R}^2 - L$, et de $\mathbb{R}^2 - (D \cup H \cup L)$.

2. Espaces métriques compacts. Soit (E,d) un espace métrique compact et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de parties fermées non-vides de E.

2.a. (Question de cours) Montrer que toute suite croissante d'ouverts $(U_n)_{n\geq 0}$ de E telle que $E = \bigcup_{n\geq 0} U_n$ est stationnaire (i.e. il existe N tel que $U_N = E$). En déduire que l'intersection $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$ est non-vide.

2.b. On note $\delta_n = \sup_{x,y\in F_n} d(x,y)$. C'est ce qu'on appelle le *diamètre* de F_n.

Montrer que $(\delta_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs. Montrer que pour tout n, il existe $(x_n, y_n) \in F_n \times F_n$ tel que $\delta_n = d(x_n, y_n)$. (On pourra utiliser sans démonstration que la distance $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et que $F_n \times F_n$ est une partie compacte de $E \times E$).

2.c. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ alors l'intersection F est singleton.

2.d. Soit $\phi : E \to E$ une application continue *contractante*, i.e. telle qu'il existe un réel positif $\alpha < 1$ vérifiant $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x,y)$ pour tous $x, y \in E$. On choisit $x_0 \in E$ quelconque, et on pose $x_{n+1} = \phi(x_n)$ pour $n \geq 0$.

Montrer que $d(x_n, x_{n+k}) \leq \alpha^n d(x_0, x_k) \leq \alpha^n(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{k-1})d(x_0, x_1)$ pour tous $n \geq 0, k > 0$. En déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une *suite de Cauchy*. Montrer qu'elle converge dans E, que sa limite vérifie $\phi(x) = x$, et que x est l'unique point de E ayant cette propriété.

3. Continuité et connexité. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$.

3.a. Montrer que f n'est pas continue en $x = 0$. (On pourra construire une suite de points $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mais $f(x_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$).

3.b. Montrer que le graphe Γ_f de f n'est pas fermé. (On pourra montrer que le point $(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à $\overline{\Gamma}_f \backslash \Gamma_f$).

3.c. Montrer que le graphe d'une fonction continue $h : A \to \mathbb{R}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ is A est une partie connexe de $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser que Γ_h s'identifie à l'image de l'application $H : A \to \mathbb{R}^2 : (x \mapsto (x, h(x)))$.

3.d. Déduire de ce qui précède que $\Gamma_f \backslash \{(0,0)\}$ est réunion de deux parties connexes. Conclure que l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. Hors barême: montrer que $\overline{\Gamma}_f$ n'est pas connexe par arcs.

Corrigé

1.a. Les parties compactes de $\mathbb{R}^2$ sont précisément les parties fermées bornées de $\mathbb{R}^2$. Toute réunion disjointe de deux ouverts non-vides de $\mathbb{R}^2$ est un exemple d'une partie ouverte non-connexe de $\mathbb{R}^2$.

1.b. D, H, L sont des parties fermées, non-ouvertes. D est compacte (car bornée), H, L sont non-compactes (car non-bornées). D est connexe (car convexe), H est connexe (car connexe par arcs). L est non-connexe (car contenu dans une réunion disjointe de deux ouverts non-vides).

1.c. $\mathbb{R}^2 - D, \mathbb{R}^2 - H, \mathbb{R}^2 - L$ sont des ouverts, non-fermés. Ils sont tous non-compacts, car non-fermés. $\mathbb{R}^2 - D$ est connexe (car connexe par arcs). $\mathbb{R}^2 - H$ est non-connexe (car réunion disjointe de deux ouverts non-vides). $\mathbb{R}^2 - L$ est connexe (car connexe par arcs).

1.d. $\mathbb{R}^2 - D$ et $\mathbb{R}^2 - L$ ont une composante connexe. $\mathbb{R}^2 - H$ et $\mathbb{R}^2 - (D \cup H \cup L)$ ont deux composantes connexes.

2.a. Si $E = \bigcup_{n \geq 0} U_n$ alors la propriété de Borel-Lebesgue implique l'existence d'un recouvrement fini $E = U_{n_0} \cup U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_K}$.

On peut supposer $n_0 < n_1 < \cdots < n_K$, donc $E = U_N$ pour $N = n_K$, et la suite des U_n est stationnaire à partir du rang N.

Si $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ était vide, alors $E = E - F = \bigcup_{n \geq 0}(E - F_n)$. D'après ce qui précède, on aurait $E - F_N = E$ donc $F_N = \emptyset$ contraire à l'hypothèse. Il s'en suit que F est non-vide.

2.b. Comme $F_n \times F_n$ est compact et la distance $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, le $\sup_{(x,y) \in F_n \times F_n} d(x, y)$ est "atteint" (cf. cours) ce qui veut dire qu'il existe $(x_n, y_n) \in F_n \times F_n$ tel que $\delta_n = d(x_n, y_n)$. En particulier $0 \leq \delta_n < \infty$. Comme $F_n \supset F_{n+1}$ le sup qui définit δ_n est pris sur une partie $F_n \times F_n$ qui contient $F_{n+1} \times F_{n+1}$ partie sur laquelle le sup δ_{n+1} est pris; on a donc forcément $\delta_n \geq \delta_{n+1}$.

2.c. Si $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ alors $\forall \epsilon > 0 \, \exists N_\epsilon$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \delta_n < \epsilon$ dès que $n \geq N_\epsilon$. Il ne peut donc pas exister $x, y \in F$ tels que $d(x, y) = \epsilon > 0$. Il s'en suit que pour tous $x, y \in F : d(x, y) = 0$. Or, F est non-vide, donc il existe $x \in F$, et pour tout $y \in F$ on a $d(x, y) = 0$, donc $x = y$. Il s'en suit que $F = \{x\}$.

2.d. On montre par récurrence sur n que $x_n = \phi^n(x_0)$.

Comme $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y)$ on obtient

$$d(x_n, x_{n+k}) = d(\phi^n(x_0), \phi^n(x_k)) \leq \alpha d(\phi^{n-1}(x_0)\phi^{n-1}(x_k)) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, x_k).$$

L'inégalité triangulaire implique

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \\ &\leq d(x_0, x_1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha_{k-1}) \\ &\leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

ce qui donne $d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$. Puisque ce majorant ne dépend pas de k et tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Comme E est compact, E est complet (cf. cours) et toute suite de Cauchy converge dans E. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Comme ϕ est continue, on obtient $\phi(x) = \phi(\lim_{n\to\infty} x_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, donc x est "point fixe" de ϕ. Si $y \in E$ est également "point fixe" de ϕ, alors

$$d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Comme $\alpha < 1$ ceci n'est possible que si $d(x, y) = 0$ c'est-à-dire $x = y$.

3.a. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$ et sur $\mathbb{R}_{<0}$ car composition de fonctions continues en restriction à ces intervalles. En posant $x_n = \frac{2}{4n+1}$ on obtient d'une part $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

de sorte que f n'est pas continue en 0.

3.b. Par définition, $(x_n, f(x_n)) \in \Gamma_f$, mais $\lim_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (0, 1)$ n'appartient pas au graphe Γ_f. Pourtant, étant limite de points du graphe, il appartient à l'adhérence $\bar{\Gamma}_f$ (cf. cours). Par conséquent: $\Gamma_f \neq \bar{\Gamma}_f$ est Γ_f n'est pas fermé (cf. cours).

3.c. Comme Γ_h est l'image par $H : A \to \mathbb{R}^2$ et que H est une application continue (car les deux projections id_A et h le sont), le graphe Γ_h est l'image d'une partie connexe par une application continue, et donc connexe (cf. cours).

3.d. On peut écrire $\Gamma_f - \{(0, 0)\} = \Gamma_f^+ \cup \Gamma_f^-$ en posant $\Gamma_f^\pm = \Gamma_f \cap (\mathbb{R}_{\gtrless 0} \times \mathbb{R})$. Comme Γ_f^+ (resp. Γ_f^-) est le graphe de la fonction f retreinte à $\mathbb{R}_{>0}$ (resp. $\mathbb{R}_{<0}$) et que ces restrictions sont continues, il suit de **3.c** que les deux parties sont connexes. Par conséquent, $\Gamma_f - \{(0, 0)\}$ est réunion de deux parties connexes.

Il s'en suit que $\overline{\Gamma}_f = \overline{\Gamma_f^+} \cup \overline{\Gamma_f^-}$ est également réunion de deux parties connexes. Comme $(0, 1) \in \overline{\Gamma_f^+} \cap \overline{\Gamma_f^-}$ et que la réunion de deux parties connexes d'intersection non-vide est connexe, on obtient finalement que $\overline{\Gamma}_f$ est connexe.