Partiel du 20 octobre 2015
Durée: 1h30. Tout document interdit.

1. Frontière. Soit E un espace topologique et soient A, B deux parties de E.

1.a. Un point $x \in E$ appartient à la frontière $\mathrm{Front}(A)$ si tout voisinage de x rencontre à la fois A et $E \backslash A$. Montrer $\bar{A} \cap \overline{E \backslash A} = \mathrm{Front}(A) = \bar{A} \backslash \mathrm{Int}(A)$.

1.b. Rappeler pourquoi on a l'identité $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Montrer l'inclusion $\mathrm{Front}(A \cup B) \subset \mathrm{Front}(A) \cup \mathrm{Front}(B)$.

1.c. Montrer que si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ alors $\mathrm{Front}(A \cup B) = \mathrm{Front}(A) \cup \mathrm{Front}(B)$. Indiquer deux parties A, B de $\mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Front}(A \cup B) \neq \mathrm{Front}(A) \cup \mathrm{Front}(B)$.

1.d. Supposons que A et B soient des parties ouvertes et denses dans E. Montrer que la réunion $A \cup B$ est alors également ouverte et dense. En déduire l'identité $\mathrm{Front}(A \cup B) = \mathrm{Front}(A) \cap \mathrm{Front}(B)$.

2. Suites de Cauchy et compacité. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite de boules $(B_k)_{k \geq 0}$ dans E est dite *confinée* s'il existe un point $x \in E$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ de sorte que $B_k \subset B(x, \epsilon)$ si $k \geq N$.

2.a. Soient deux boules ouvertes $B(x_1, \epsilon_1)$ et $B(x_2, \epsilon_2)$ dans (E, d) ayant une intersection non vide. Montrer que $d(x_1, x_2) < \epsilon_1 + \epsilon_2$. En déduire que toute suite de boules $B_k = B(x_k, \frac{1}{2^k})$ telles que deux boules successives aient une intersection non vide vérifie pour $k < l$ que $d(x_k, x_l) < \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^{k-1}}$.

2.b. Déduire de **2.a** que la suite des centres $(x_k)_{k \geq 0}$ de la suite $(B_k)_{k \geq 0}$ considérée est une suite de Cauchy. Conclure que si (E, d) est complet, alors la suite des boules $(B_k)_{k \geq 0}$ est confinée.

On dira qu'un recouvrement $E = \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts U_i est *de type fini* s'il existe une partie finie $\{i_1, \ldots, i_N\} \subset I$ telle que $E = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}$.

2.c. Montrer que le recouvrement de $\mathbb{R}$ par les ouverts $]n - \frac{3}{4}, n + \frac{3}{4}[\quad (n \in \mathbb{Z})$ n'est pas de type fini. En déduire qu'une partie de $\mathbb{R}$ qui rencontre une infinité de ces ouverts ne peut pas être compacte.

2.d. On suppose que (E, d) est totalement borné et qu'il existe un recouvrement par des ouverts $E = \bigcup_{i \in I} U_i$ qui n'est pas de type fini. Un point $x_k \in E$ est dit *k-exceptionnel* si la boule $B(x_k, \frac{1}{2^k})$ n'est pas recouvert par un nombre fini de ces U_i. Construire alors par récurrence une suite de points k-exceptionnels $(x_k)_{k \geq 0}$ de sorte que $B(x_k, \frac{1}{2^k}) \cap B(x_{k+1}, \frac{1}{2^{k+1}}) \neq \emptyset$ pour tout $k \geq 0$.

2.e. Déduire (en raisonnant par l'absurde) de **2.b** et de **2.d** que si (E, d) est totalement borné et complet alors E est compact.

3. Equivalence de normes. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle. Soient $\|-\|_2$ la norme euclidienne et $\|-\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

3.a. Montrer que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, il existe des réels positifs λ_1^K, λ_2^K tels que $\|x\| \leq \lambda_1^K$ et $\|x\|_2 \leq \lambda_2^K$ pour tout $x \in K$.

3.b. Montrer que la boule-unité $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et la boule-unité $B' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ sont homéomorphes. En déduire que B est compacte.

3.c. Déduire de **3.a** et **3.b** l'existence de réels $\lambda = 1/\lambda_1^{B'}$ et $\mu = \lambda_2^B$ tels que

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|_2 \leq \mu\|x\| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Indication: pour établir les inégalités il suffit dans un premier temps de considérer les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_2 = 1$, resp. $\|x\| = 1$.

3.d. Montrer (en utilisant la compacité de B) qu'il existe un nombre fini de vecteurs $x_1, \ldots, x_k \in B$ tels que $B \subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup \cdots \cup B(x_k, \frac{1}{2})$. En déduire qu'on a également l'inclusion

$$B \subset \bigcup_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2} B(x_i + \frac{1}{2}x_j, \frac{1}{4}).$$

Hors barême: en itérant la construction, conclure que le sous-espace vectoriel engendré par les $x_1, \ldots, x_k$ contient B et par conséquent $\mathbb{R}^n$.

Remarque: le même argument s'applique à tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|-\|)$ dont la boule-unité est compacte. En particulier, de tels espaces vectoriels normés sont forcément de dimension finie (c'est le théorème de Riesz).

Barême indicatif:

(1.5+1.5+1.5+1.5)+(1.5+2+1.5+1.5+1.5)+(1.5+1.5+1.5+1.5)