Partiel du 21 octobre 2014
Durée: 1h30. Tout document interdit.

1. Points isolés. On dit qu'un point $x \in A$ d'un espace topologique E est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert U de E tel que $A \cap U = \{x\}$.

1.a. En considérant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme des parties de $\mathbb{R}$ montrer que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés mais qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

1.b. On pose $\alpha(A) = \overline{\overset{o}{A}}$, i.e. $\alpha(A)$ est l'adhérence de l'intérieur de A. Montrer que si A est ouvert (resp. fermé) alors $A \subset \alpha(A)$ (resp. $A \supset \alpha(A)$).

1.c. Montrer que si x est à la fois un point isolé de A et un point intérieur de A, alors le singleton $\{x\}$ est un ouvert de E.

1.d. Montrer que si $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 1$) et $A = \alpha(A)$, alors A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ ne contenant aucun point isolé.

2. Compacité. Soit E un espace compact et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de parties fermées non vides de E.

2.a. Montrer que l'intersection $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$ est compacte.

2.b. Montrer que la suite croissante $(E\backslash F_n)_{n\geq 0}$ n'est pas exhaustive (i.e. $\bigcup_{n\geq 0}(E\backslash F_n) \neq E$). En déduire que F est non vide.

Pour la suite de l'exercice on suppose en plus que la topologie de E est celle d'un espace métrique (E, d) et on note $\delta_n = \sup\limits_{x,y\in F_n} d(x, y)$.

2.c. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ alors F est singleton.

2.d. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de (E, d) par des ouverts. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute ϵ-boule de (E, d) soit contenue dans un des U_i.
Indication: Considérer une suite de boules $B(a_n, \frac{1}{n+1})$ contenues dans aucun des U_i, et étudier les valeurs d'adhérence de la suite des centres.

3. Continuité et connexité. On considère les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(0) = g(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{x}) \text{ et } g(x) = x\sin(\frac{\pi}{x}).$$

3.a. Montrer que f et continue en tout $x \neq 0$, et que g est continue partout. Montrer que f n'est pas continue en $x = 0$. *Indication:* construire une suite de points $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ mais $f(x_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

3.b. Déduire de ce qui précède que le graphe Γ_g de g est fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais que le graphe Γ_f de f n'est pas fermé. *Indication:* on pourra montrer que le point $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à $\overline{\Gamma}_f\backslash\Gamma_f$.

3.c. Montrer que si A et B sont deux parties connexes de $\mathbb{R}$, alors $A \times B$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. *Indication:* Montrer d'abord que les deux projections $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ appliquent les ouverts de $\mathbb{R}^2$ sur des ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer ensuite qu'une décomposition de $A \times B$ en deux ouverts non vides disjoints entraine une telle décomposition pour A ou pour B.

3.d. Déduire de ce qui précède que le graphe Γ_h d'une fonction continue $h : A \to \mathbb{R}$ définit une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. En déduire que Γ_g et $\Gamma_f \setminus \{(0,0)\}$ sont des parties connexes de $\mathbb{R}^2$. Conclure que l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. Hors barême: montrer que $\overline{\Gamma}_f$ n'est pas connexe par arcs.

Barême indicatif: 6.5 + 7 + 6.5