Partiel du 24 octobre 2017
Durée: 1h30. Tout document interdit.

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On pose $C_{ij} = A_i \cap B_j$ pour $i, j \in \{1, 2\}$ où

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\} \qquad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$$
$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\} \qquad B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^3\}$$

1.a. Dessiner dans un même graphique les graphes des fonctions $y = x$ et $y = x^3$ (avec un soin particulier pour le second en ce qui concerne son allure à l'origine). Situer les C_{ij} dans le complémentaire de ces deux graphes.

1.b. Montrer que les C_{ij} sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Lesquels parmi les C_{ij} peuvent s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$? Y a-t-il parmi les adhérences $\overline{C_{ij}}$ des parties compactes de $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.

1.c. Déterminer les frontières des quatres parties C_{ij}. Parmi ces frontières lesquelles peuvent être représentées comme des graphes de fonctions ? Le cas échéant indiquer la fonction dont le graphe réalise la frontière.

1.d. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ est un homéomorphisme. En déduire que C_{11} et C_{22} (avec leurs topologies induites) sont homéomorphes, et de même C_{12} et C_{21} sont homéomorphes.

Montrer que pour tous i, j l'intersection $\overline{C_{ij}} \cap \overline{f(C_{ij})}$ ne contient que des points isolés.

2. Compacité, densité et théorème de Baire dans $\mathbb{R}^n$ $(n > 0)$.

2.a. Montrer que pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ et tout $x \in U$ il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ et tel que $\overline{V}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

2.b. Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dense (i.e. $\overline{A} = \mathbb{R}^n$) si et seulement si tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ rencontre A.

2.c. Déduire de **2.a-b** que pour un ouvert dense V et un compact K d'intérieur non vide il existe un compact L d'intérieur non vide tel que $L \subset K \cap V$.

2.d. Soit $(U_k)_{k\geq 0}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que pour $k \neq 0$ les U_k sont également denses. Construire à l'aide de **2.a-c** une suite *décroissante* de compacts K_k d'intérieur non vide telle que

$$K_k \subset U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k \text{ pour } k \geq 0.$$

2.e. On rappelle que toute suite décroissante de compacts non vides admet une intersection non vide. En déduire qu'avec les notations de **2.d** l'intersection $\bigcap_{k\geq 0} U_k$ est non vide. Conclure à l'aide de **2.b** que l'intersection $\bigcap_{k\geq 1} U_k$ est dense dans $\mathbb{R}^n$. C'est le *théorème de Baire*.

2.f. Soit $(F_k)_{k\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Montrer que $U_k = \mathbb{R}^n \backslash F_k$ est un ouvert dense. En déduire que la réunion $\bigcup_{k\geq 1} F_k$ est d'intérieur vide.

2.g. Déduire de **2.f** que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide. Conclure que $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable.

Barême indicatif: (2+2+2+2) + (1.5+1.5+2+2+2+1.5+1.5) = 20 pts