Feuille d'exercices n^{o}4

ESPACES (PRÉ)MESURÉS.

Un *anneau* $\mathcal{A}$ sur X est une collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$;
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $B \backslash A \in \mathcal{A}$.

Une *mesure* μ sur un anneau $\mathcal{A}$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour $A, B \in \mathcal{A}$;
3. Si $A_n \uparrow A$ alors $\mu(A_n) \uparrow= \mu(A)$ pour $A_n, A \in \mathcal{A}$.

Un tel triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s'appelle un *espace prémesuré.*

a. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cap B \in \mathcal{A}$.

b. Montrer que l'axiome (2) ci-dessus est équivalente à l'axiome:
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

c. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ des réunions finies disjointes d'intervalles bornés est un anneau sur $\mathbb{R}$. Construire un espace prémesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$.

d. Montrer qu'un anneau $\mathcal{A}$ sur X est une tribu si et seulement si $X \in \mathcal{A}$ et pour tout $A_n \uparrow A$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ on a $A \in \mathcal{A}$.

e. Montrer $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$ pour $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

On dit qu'une partie Y de X est λ-*bornée* s'il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\mu(A_n) \leq \lambda$ et $Y \subset \bigcup_n A_n$.

f. On pose pour $Y \in \mathcal{P}(X)$: $\mu^*(Y) = \inf\{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+ \,|\, Y \text{ est } \lambda\text{-bornée}\}$. Montrer que pour $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A) = \mu^*(A)$.

g. Montrer que pour $Y_1 \subset Y_2$ on a $\mu^*(Y_1) \leq \mu^*(Y_2)$. Montrer que pour $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{P}(X)$ on a $\mu^*(Y_1 \cup \cdots \cup Y_n) \leq \mu^*(Y_1) + \cdots + \mu^*(Y_n)$.

h. Montrer que $\mu^*(\bigcup_n Y_n) \leq \sum_n \mu^*(Y_n)$ pour toute famille dénombrable (Y_n).

i. On dit que $A \in \mathcal{P}(X)$ est μ-partitionnant si pour tout $Y \in \mathcal{P}(X)$ on a

$$\mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \backslash A) = \mu^*(Y).$$

Montrer que les éléments de l'anneau $\mathcal{A}$ sont μ-partitionnant.

j. Montrer que pour une suite croissante (Y_n) de parties μ-partitionnants on a égalité $\mu^*(\bigcup_n Y_n) = \sup_n \mu^*(Y_n)$.

k. Montrer que l'ensemble $\bar{\mathcal{A}}$ des parties μ-partitionnants forment une tribu sur X. Il convient d'utiliser (d).

l. Montrer que $(X, \bar{\mathcal{A}}, \mu^*_{|\bar{\mathcal{A}}})$ et $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$ sont des espaces mesurés.

Remarque. La fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ s'appelle la *mesure extérieure* associée à $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$. La mesure extérieure n'est pas une mesure sur $\mathcal{P}(X)$!!