Feuille d'exercices n^{o}2

TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$, CONTINUITÉ ET DENSITÉ.

1. Topologie de $\mathbb{R}$.

1.a. Parmi les quatre parties suivantes de la droite réelle $\mathbb{R}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[, \quad \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n > 0\}, \quad [a, \infty[, \quad [a, b] - \{\frac{a+b}{2}\}$$

lesquelles sont ouvertes, lesquelles sont fermées, lesquelles ne sont ni ouvertes ni fermées ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

1.b. Montrer que pour tout point x d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant x et contenu dans U. Montrer qu'on peut choisir cet intervalle de sorte que sa longueur $\beta - \alpha$ *et* son centre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ soient rationnels.

1.c. Montrer que $\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts ayant un centre et un rayon rationnels. Déduire de **1.b** que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion de tels intervalles.

2. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x^2 \le y \le x^2\} \\
B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \\
C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\} \\
D &= B \backslash A
\end{aligned}$$

2.a. Déterminer les *adhérences* $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$. Parmi les parties A, B, C, D lesquelles sont *ouvertes*, lesquelles sont *fermées*. Justifier !

2.b. Déterminer les *intérieurs* de A, B, C, D.

2.c. La *frontière* d'une partie P est $Front(P) = \overline{P} \backslash Int(P)$. Déduire de **1.a-b** les frontières de A, B, C, D, ainsi que l'intersection des quatre frontières.

2.d. Écrire D comme une réunion de deux parties D_0, D_1 de $\mathbb{R}^2$ tels que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ et $\overline{D_0} \cap \overline{D_1} = \{(0, 0)\}$.

3. Passage à la frontière. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue vérifiant $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$. Montrer que l'image de γ rencontre le cercle-unité S^1 ainsi que le losange L de sommets $(\pm 1.5, 0), (0, \pm 1.5)$.

4. Graphe d'une fonction continue. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ? (Considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

5. L'ensemble des fonctions continues réelles sur un espace métrique.

5.a. Montrer que l'addition et la multiplication sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

5.b. Montrer que pour deux fonctions continues $f, g : (E, d) \to \mathbb{R}$, les applications $x \mapsto f(x) \pm g(x)$ et $x \mapsto f(x)g(x)$ définissent des fonctions continues $f \pm g, f \cdot g : (E, d) \to \mathbb{R}$. (Autrement dit, l'ensemble des fonctions continues réelles sur un espace métrique forme une $\mathbb{R}$-algèbre).

5.c. Montrer (en utilisant b) que $\{f \leq g\} = \{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de (E, d) resp. $\{f < g\} = \{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de (E, d).

4. Densité. Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle-unité qu'on munit de la topologie induite.

5.a. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue et surjective.

5.b. Montrer que toute application continue surjective envoie partie dense sur partie dense. En déduire que S^1 possède une partie dénombrable dense.

6. Points isolés. On dit qu'un point $x \in A$ d'un espace topologique E est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert U de E tel que $A \cap U = \{x\}$.

6.a. En considérant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme des parties de $\mathbb{R}$ montrer que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés mais qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

6.b. On pose $\alpha(A) = \overline{\overset{o}{A}}$, i.e. $\alpha(A)$ est l'adhérence de l'intérieur de A. Montrer que si A est ouvert (resp. fermé) alors $A \subset \alpha(A)$ (resp. $A \supset \alpha(A)$).

6.c. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $A = \alpha(A)$ alors A est fermé et ne contient aucun point isolé. La réciproque est-elle vraie ?

7. Espaces topologiques séparés. Montrer qu'un espace topologique E est séparé si et seulement si $\Delta_E = \{(x, x) \in E \times E\}$ est un fermé dans $E \times E$.

En déduire que pour deux applications continues $f, g : E_1 \to E_2$, l'ensemble des points $Eq(f, g) = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E_1 pourvu que E_2 est séparé.

8. Topologie de $\mathbb{R}^n$.

8.a. Montrer que la topologie de $(\mathbb{R}^n, \|{-}\|)$ induite par une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ coincide avec la topologie-produit sur $\mathbb{R}^n$.

8.b. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est continue si et seulement si $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ l'est pour tout $i = 1, \ldots, n$.

8.c. Montrer que le déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de la topologie standard. En déduire que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

MOTS-CLÉS: *Topologie de $\mathbb{R}^n$, continuité, densité, topologie-produit.*