Contrôle du 3 décembre 2013
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

Barême indicatif: 5 + 5

1. Connexité et homéomorphismes locaux.

1.a. Rappeler la définition d'un espace topologique connexe.

1.b. Montrer qu'un espace topologique discret (i.e. dont toutes les parties sont ouvertes) n'est connexe que s'il possède au plus un point.

1.c. On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme local* si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert V_x contenant x tel que la restriction $f_{|V_x} : V_x \to Y$ est injective et applique les ouverts de V_x sur des ouverts de Y.
Montrer que les images réciproques $f^{-1}(\{y\})$, $y \in Y$, d'un homómorphisme local $f : X \to Y$ sont des parties discrètes de X.

1.d. Montrer qu'un homéomorphisme local $f : X \to Y$ applique toute partie ouverte de X sur une partie ouverte de Y.

1.e. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si c'est un homéomorphisme local dont les images réciproques $f^{-1}(\{y\})$, $y \in Y$, sont des parties connexes non vides de X.

2. Mesures dichotomiques. Soit X un ensemble. On dit qu'une mesure μ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est *dichotomique* si μ ne prend que les valeurs 0 et 1, et si $\mu(X) = 1$. Pour une telle mesure on pose $\mathcal{A}_\mu = \{Y \subset X \mid \mu(Y) = 1\}$.

2.a. Rappeler la définition d'une algèbre $\mathcal{A}$ sur X et d'une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$.

2.b. Montrer que $\mathcal{A}_\mu$ est une collection de parties de X vérifiant:

(i) $A \in \mathcal{A}_\mu,\ A \subset B \implies B \in \mathcal{A}_\mu$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A}_\mu \implies A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$;

(iii) Pour toute partie $Y \subset X$ soit $Y \in \mathcal{A}_\mu$ soit $X \backslash Y \in \mathcal{A}_\mu$.

2.c. Soit $\mathcal{U}$ une collection de parties de X vérifiant les propriétés (i)-(iii) ci-dessus (une telle collection s'appelle un *ultrafiltre* sur X). Montrer qu'il existe au plus une mesure dichotomique μ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ telle que $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{U}$, et qu'il en existe une si $\mathcal{U}$ et stable par intersection dénombrable.

2.d. Rappeler la définition d'une fonction étagée $(X, \mathcal{P}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_X f d\mu$ pour une fonction étagée f ? Qu'en est-il si μ est la mesure de Dirac δ_x du point $x \in X$?

2.e. Quelles sont les fonctions mesurables $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (\mathbb{R}, \lambda_\mathbb{R})$? Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_X f d\mu$ pour une fonction mesurable bornée f ? Qu'en est-il si μ est la mesure de Dirac δ_x du point $x \in X$?