Contrôle n^{o}1 du 1er octobre 2013
Durée: 45 minutes
Barême indicatif : 3 + 3 + 4.

1. Topologie de $\mathbb{R}$.

1.a. Parmi les quatre parties suivantes de la droite réelle $\mathbb{R}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[, \quad \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n > 0\}, \quad [a, \infty[, \quad [a, b] - \{\frac{a+b}{2}\}$$

lesquelles sont ouvertes, lesquelles sont fermées, lesquelles ne sont ni ouvertes ni fermées ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

1.b. Montrer que pour tout point x d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant x et contenu dans U. Montrer qu'on peut choisir cet intervalle de sorte que sa longueur $\beta - \alpha$ *et* son centre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ soient rationnels.

2. Densité. Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle-unité qu'on munit de la topologie induite.

2.a. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue et surjective.

2.b. Montrer que toute application continue surjective envoie partie dense sur partie dense. En déduire que S^1 possède une partie dénombrable dense.

3. Points isolés. On dit qu'un point $x \in A$ d'un espace topologique E est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert U de E tel que $A \cap U = \{x\}$.

3.a. En considérant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ comme des parties de $\mathbb{R}$ montrer que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés mais qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.

3.b. On pose $\alpha(A) = \overline{\overset{o}{A}}$, i.e. $\alpha(A)$ est l'adhérence de l'intérieur de A. Montrer que si A est ouvert (resp. fermé) alors $A \subset \alpha(A)$ (resp. $A \supset \alpha(A)$).

3.c. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $A = \alpha(A)$ alors A est fermé et ne contient aucun point isolé. La réciproque est-elle vraie ?