Examen du 7 juin 2016
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x^2 \leq y \leq x^2\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$$
$$D = B \backslash A$$

1.a. Parmi les parties A, B, C, D lesquelles sont *ouvertes*, lesquelles sont *fermées*, lesquelles sont *connexes*, lesquelles sont *compactes* ?

1.b. Déterminer les *intérieurs* et les *frontières* de A, B, C, D.

1.c. Déterminer les *composantes connexes* de $B \cup C$, de $\mathbb{R}^2 - (B \cup C)$, de D et de $\mathbb{R}^2 - D$. Justifier votre réponse.

2. Parties compactes et cocompactes de $\mathbb{R}$. Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *cocompacte* si son complémentaire est compact.

2.a. Montrer qu'une intersection quelconque de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Quelles sont les propriétés analogues des parties cocompactes de $\mathbb{R}$?

2.b. On pose $\mathbb{S} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Une partie A de $\mathbb{S}$ est dite ouverte si, soit A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, soit A contient ∞ et $A - \{\infty\}$ est cocompact dans $\mathbb{R}$. Montrer à l'aide de **2.b** que les ouverts de $\mathbb{S}$ définissent une topologie $\tau_{\mathbb{S}}$ sur $\mathbb{S}$.

2.c. Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{S}, \tau_{\mathbb{S}})$ est compact.

2.d. Montrer que $\mathbb{S}$ est homéomorphe au cercle-unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

3. Parties négligeables de $[0,1]$ et ensemble triadique de Cantor. On dit qu'une partie N d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *négligeable* si N est contenue dans une partie $B \in \mathcal{A}$ de X telle que $\mu(B) = 0$.

On pose $\overline{\mathcal{A}} = \{C \subset X | C = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{A}$ et N négligeable$\}$

3.a. Montrer que $C \in \overline{\mathcal{A}}$ si et seulement s'il existent $A, B \in \mathcal{A}$ telles que $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$. En déduire que $\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ et toutes les parties négligeables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

3.b. On définit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant $\overline{\mu}(C) = \mu(A) = \mu(B)$ pour un couple $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$.
Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $(X, \overline{\mathcal{A}})$. Montrer que toutes les parties négligeables de l'espace mesuré $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$.

3.c. Rappeler la définition d'une fonction mesurable entre espaces mesurables. Montrer qu'une fonction continue $f : ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}) \to ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ est mesurable. Montrer que toute partie dénombrable de $[0,1]$ appartient à la *tribu Borélienne*

$\mathcal{B}_{[0,1]}$. En déduire que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est croissante, alors f est mesurable (on pourra utiliser que l'ensemble de discontinuité d'une fonction croissante est fini ou dénombrable). Quelle est la *mesure de Lebesgue* $\lambda(D)$ d'une partie dénombrable D de $[0,1]$?

3.d. On définit une suite décroissante de parties fermées $(A_n)_{n\geq 0}$ de $[0,1]$ comme suit: pour tout intervalle fermé $A = [a,b] \subset [0,1]$ on pose

$$\gamma_0(A) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \text{ et } \gamma_2(A) = [a + \frac{2(b-a)}{3}, b].$$

On pose $A_0 = [0,1]$ et si A_{n-1} est réunion disjointe des 2^{n-1} intervalles fermés $A_{n-1}^{(i)}$ alors A_n est la réunion disjointe des 2^n intervalles fermés obtenus en remplaçant chaque $A_{n-1}^{(i)}$ par la réunion des deux intervalles $\gamma_0(A_{n-1}^{(i)})$ et $\gamma_2(A_{n-1}^{(i)})$.

Calculer $\lambda(A_n)$ en fonction de n. En déduire que $A_\infty = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ est une partie compacte de $[0,1]$ de mesure nulle. C'est l'*ensemble triadique de Cantor*. Montrer que les composantes connexes de A_∞ sont singletons.

3.e. On utilisera dans cette question que tout point $x \in [0,1]$ possède une écriture dyadique $x = \sum_{n>0} \frac{\alpha_n(x)}{2^n}$ et triadique $x = \sum_{n>0} \frac{\beta_n(x)}{3^n}$ telles que $\alpha_n(x) \in \{0,1\}$ et $\beta_n(x) \in \{0,1,2\}$.

Ces écritures sont uniques si pour $x \neq 1$ on exclut les séries telles que $\alpha_n(x)$ (resp. $\beta_n(x)$) sont presque tous 1 (resp. 2), ce que nous ferons par la suite.

Montrer que $x \in A_\infty$ si et seulement si $\forall n : \beta_n(x) \neq 1$. En déduire que l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ qui associe au point $x = \sum_{n>0} \frac{\alpha_n(x)}{2^n}$ le point $f(x) = \sum_{n>0} \frac{2\alpha_n(x)}{3^n}$ vérifie $f([0,1]) = A_\infty$. Conclure que pour toute partie $P \subset [0,1]$ l'image $f(P)$ est une partie négligeable de $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.

3.f. Montrer que f est une fonction strictement croissante préservant 0 et 1. *Indication:* On pourra montrer que pour $x, y \in [0,1]$ on a $x < y$ si et seulement s'il existe $m > 0$ tel que $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$ pour $k < m$ et $\alpha_m(x) < \alpha_m(y)$ si et seulement s'il existe $n > 0$ tel que $\beta_k(x) = \beta_k(y)$ pour $k < n$ et $\beta_n(x) < \beta_n(y)$.

En déduire à l'aide de **3.c** que si P n'appartient pas á la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{[0,1]}$ alors son image $f(P)$ non plus.

Conclure à l'aide de **3.a** et de **3.e** que $\mathcal{B}_{[0,1]} \neq \overline{\mathcal{B}_{[0,1]}}$.

Barème indicatif: 5 + 6 + 9