Examen du 12 juin 2015
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x^2 \leq y \leq x^2\} \\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\} \\
D &= B \backslash A
\end{aligned}$$

1.a. Déterminer les *adhérences* $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$. Parmi les parties A, B, C, D lesquelles sont *ouvertes*, lesquelles sont *fermées*, lesquelles sont *compactes* ?

1.b. Déterminer les *intérieurs* de A, B, C, D.

1.c. Déterminer les *frontières* de A, B, C, D.

1.d. Déterminer les *composantes connexes* de A et de D.

2. Parties compactes et cocompactes de $\mathbb{R}$. Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *cocompacte* si son complémentaire est compact.

2.a. Quels sont les intervalles compacts, resp. cocompacts de $\mathbb{R}$?

2.b. Montrer qu'une intersection quelconque de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Quelles sont les propriétés analogues des parties cocompactes de $\mathbb{R}$?

2.c. On pose $\mathbb{S} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Une partie A de $\mathbb{S}$ est dite ouverte si, soit A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, soit A contient ∞ et $A - \{\infty\}$ est cocompact dans $\mathbb{R}$. Montrer à l'aide de **2.b** que les ouverts de $\mathbb{S}$ définissent une topologie $\tau_{\mathbb{S}}$ sur $\mathbb{S}$.

2.d. Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{S}, \tau_{\mathbb{S}})$ est compact.

2.e. Montrer que $\mathbb{S}$ est homéomorphe au cercle-unit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

3. Mesures à support ponctuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la tribu des parties boréliennes sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\delta_x : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de Dirac définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

3.a. Montrer que δ_x est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

3.b. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe un ouvert maximal $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ de mesure nulle: $\mu(U_\mu) = 0$. Le *support de la mesure* μ est défini par $\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n \backslash U_\mu$. Montrer que $\text{supp}(\delta_x) = \{x\}$.

3.c. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support ponctuel $\{x\}$. Montrer que $\mu = \lambda \delta_x$ pour un réel $\lambda \geq 0$. (On pourra montrer que pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ contenant x on a $\mu(A) = \mu(\{x\})$ en calculant $\mu(A \backslash \{x\})$.)

3.d. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support fini $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Décrire μ comme une combinaison linéaire de mesures de Dirac. Quand est-ce que μ est une mesure de probabilité ? En connaissez-vous ?

3.e. Soit f une fonction mesurable sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ et μ une mesure à support fini. Que veut dire que f est μ-intégrable ? Le cas échéant calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Barême indicatif: (1.5+1.5+1.5+1.5) + (1+1.5+1.5+1.5+1.5) + (1+1.5+1.5+1.5+1.5)