Examen du 12 juin 2017.
Durée: 2h. Tous documents interdits.

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x^2 \leq y \leq x^2\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$
$$C = B \backslash A$$

1.a. Parmi les parties A, B, C lesquelles sont *ouvertes*, lesquelles sont *fermées*, lesquelles sont *connexes*, lesquelles sont *compactes* ?

1.b. Déterminer les *intérieurs* et les *frontières* de A, B, C, D.

1.c. Déterminer les *composantes connexes* de C, de $\mathbb{R}^2\backslash A$ et de $\mathbb{R}^2\backslash B$.

2. Parties compactes et cocompactes de $\mathbb{R}$. Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *cocompacte* si son complémentaire est compact.

2.a. Montrer qu'une intersection quelconque de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte. Quelles sont les propriétés analogues des parties cocompactes de $\mathbb{R}$?

2.b. On pose $\mathbb{S} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Une partie A de $\mathbb{S}$ est dite ouverte si, soit A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, soit A contient ∞ et $A - \{\infty\}$ est cocompact dans $\mathbb{R}$. Montrer à l'aide de **2.b** que les ouverts de $\mathbb{S}$ définissent une topologie $\tau_{\mathbb{S}}$ sur $\mathbb{S}$.

2.c. Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{S}, \tau_{\mathbb{S}})$ est compact.

2.d. Montrer que $\mathbb{S}$ est homéomorphe au cercle-unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

3. Changement de variable linéaire. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda)$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ et λ est la mesure de Lebesgue.

3.a. Montrer que toute fonction mesurable $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ définit une mesure μ_f sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ par $\mu_f(A) = \lambda(f^{-1}(A))$ pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

3.b. Montrer que pour toute fonction mesurable $\phi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, la fonction composée $\phi \circ f$ est également mesurable. Montrer que si ϕ est étagée positive alors $\phi \circ f$ également, et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda.$$

3.c. Montrer que si $\phi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est μ_f-intégrable alors $\phi \circ f$ est λ-intégrable, et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda.$$

On pourra supposer que ϕ est positive.

3.d. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une transformation linéaire inversible. Pourquoi la fonction f est-elle mesurable ? Montrer que la mesure associée μ_f vérifie

$$\mu_f(a + A) = \mu_f(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

En déduire que $\mu_f(A)/\mu_f([0,1]^n) = \lambda(A)$ pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

3.e. Montrer que pour f orthogonal (resp. diagonal à termes positifs) on a $\mu_f([0,1]^n) = 1$ (resp. $\mu_f([0,1]^n) = \frac{1}{\det(f)}$). On admettra que cela entraine que pour $f \in Gl_n(\mathbb{R})$ quelconque, on a $\mu_f([0,1]^n) = \frac{1}{|\det(f)|}$.

3.f. Déduire de ce qui précède que pour $f \in Gl_n(\mathbb{R})$ et pour ϕ λ-intégrable, on a la formule de changement de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda = \frac{1}{|\det(f)|} \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda.$$

Barême indicatif:
(1.5+1.5+2) + (1.5+2+2+1.5) + (1+1.5+1.5+1.5+1.5+1) = 20 pts