

# Examen du 27 juin 2016

3 heures

*La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.  
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.*

\* \*  
\*

## Exercice 1. Les groupes $\mathfrak{S}_p$ et $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ et leurs sous-groupes de Sylow

L'entier naturel  $p$  étant premier,  $\mathfrak{S}_p$  désigne le groupe symétrique d'un ensemble à  $p$  éléments, et  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  le groupe des matrices  $2 \times 2$  de déterminant 1 à coefficients dans le corps fini  $\mathbb{F}_p$ . Pour tout groupe fini  $G$ ,  $|G|$  désigne l'ordre de  $G$  et  $n_p(G)$  le nombre de  $p$ -Sylow de  $G$ .

**a)** Montrer que  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  est le noyau d'un morphisme de groupes surjectif  $Gl_2(\mathbb{F}_p) \rightarrow (\mathbb{F}_p^\times, \cdot, 1)$ . En déduire  $|Sl_2(\mathbb{F}_p)| = (p-1)p(p+1)$ . Conclure que  $|\mathfrak{S}_p| = |Sl_2(\mathbb{F}_p)|$  si et seulement si  $p = 5$ .

**b)** Montrer que si  $p \neq 2$  alors  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  possède un et un seul élément d'ordre 2 qu'on déterminera (résoudre l'équation  $X = X^{-1}$  dans  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ ). Quels sont les éléments d'ordre 2 de  $\mathfrak{S}_p$ ? En déduire que les groupes  $\mathfrak{S}_p$  et  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  ne sont isomorphes pour aucun nombre premier  $p$ .

**c)** Montrer que les  $p$ -Sylow de  $\mathfrak{S}_p$  sont isomorphes aux  $p$ -Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ .

**d)** Déterminer le nombre d'éléments d'ordre  $p$  de  $\mathfrak{S}_p$ . En déduire  $n_p(\mathfrak{S}_p)$  et établir ensuite la congruence de Wilson :  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

**e)** Expliciter le  $p$ -Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  contenant  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , sous-groupe noté  $U_2(\mathbb{F}_p)$ . Déterminer le sous-groupe  $N_2(\mathbb{F}_p)$  de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  des matrices  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telles que  $XUX^{-1} \in U_2(\mathbb{F}_p)$ .

**f)** Montrer que  $N_2(\mathbb{F}_p)$  est le stabilisateur en  $U$  de l'action de conjugaison de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  sur l'ensemble des  $p$ -Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$ . En déduire l'identité  $n_p(Sl_2(\mathbb{F}_p)) = [Sl_2(\mathbb{F}_p) : N_2(\mathbb{F}_p)]$ . Conclure que  $n_p(\mathfrak{S}_p) = n_p(Sl_2(\mathbb{F}_p))$  pour tout nombre premier  $p$ .

**g)** Considérons  $\mathfrak{S}_5$  comme groupe des bijections de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pour tout choix de deux parties disjointes  $\{i, j\}$  et  $\{k, l\}$  de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , montrer que le sous-groupe  $S_{(i,j;k,l)}$  de  $\mathfrak{S}_5$  engendré par les transpositions  $(ij)$ ,  $(jk)$  et  $(kl)$  est isomorphe au groupe diédral  $D_8$  à huit éléments (on pourra se servir de l'identité  $(ijkl) = (ij)(jk)(kl)$ ). En déduire  $n_2(\mathfrak{S}_5)$ .

**h)** On considère les matrices  $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  de  $Sl_2(\mathbb{F}_5)$ . Montrer que  $Q_8 = \{\pm id_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$  est un sous-groupe de  $Sl_2(\mathbb{F}_5)$ , en fait un 2-Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_5)$ .

**i)** Montrer que les 2-Sylow de  $\mathfrak{S}_5$  ne sont pas isomorphes aux 2-Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_5)$ . On pourra comparer le nombre d'éléments d'ordre 2 resp. 4 dans les groupes  $D_8$  et  $Q_8$ .

**j)** Montrer que tout 2-Sylow de  $Sl_2(\mathbb{F}_p)$  contient les matrices  $\pm id_2$ , et sinon que des matrices  $X$  d'ordre 4 vérifiant  $-X = X^{-1}$ . Combien y a-t-il de telles matrices dans  $Sl_2(\mathbb{F}_5)$ ?

\* \*  
\*

## Exercice 2. Octaèdre régulier et son groupe d'isométries

On considère les six points

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (-1, 0, 0), D = (0, -1, 0), E = (0, 0, 1), F = (0, 0, -1)$$

de  $\mathbb{R}^3$  et son enveloppe convexe  $P$  (l'octaèdre). On se place dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de son repère canonique dans lequel les points seront notés  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On notera  $s_H \in O(3)$

la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan  $H \subset \mathbb{R}^3$ . On note  $\mathfrak{S}_P$  le groupe des transformations orthogonales  $\varphi \in O(3)$  telles que  $\varphi(P) = P$ .

**a)** Montrer que l'enveloppe convexe des quatre points  $A, B, C, D$  est un carré équilatéral contenu dans l'hyperplan  $H_{EF}$  d'équation  $z = 0$ . Montrer que la réflexion  $s_{H_{EF}}$  permute les sommets  $E$  et  $F$  et fixe les quatre autres sommets de  $P$ .

**b)** Montrer que les triangles  $ABE, BCE, CDE$  et  $DAE$  sont des triangles équilatéraux et que la réflexion  $s_{H_{EF}}$  les transforme en les triangles  $ABF, BCF, CDF$  et  $DAF$ .

**c)** Vérifier la formule d'Euler pour l'octaèdre  $P$ . Expliciter un hyperplan  $H_{AC}$  (resp.  $H_{BD}$ ) vérifiant que la réflexion  $s_{H_{AC}}$  (resp.  $s_{H_{BD}}$ ) permute les sommets  $A$  et  $C$  (resp.  $B$  et  $D$ ), mais laisse fixe les quatre autres sommets de  $P$ .

**d)** Montrer que la rotation  $\varphi_z$  d'axe  $x = y = 0$  et d'angle  $\pi/2$  induit une bijection sur l'ensemble des sommets de l'octaèdre  $P$  qu'on explicitera. Même question pour la rotation  $\varphi_x$  (resp.  $\varphi_y$ ) d'axe  $y = z = 0$  (resp.  $x = z = 0$ ). En déduire que  $P$  est un polyèdre convexe régulier.

**e)** On dira que trois sommets  $S_1, S_2, S_3$  de  $P$  forme un triplet libre, si les vecteurs  $O\vec{S}_1, O\vec{S}_2, O\vec{S}_3$  sont linéairement indépendants. Montrer que tout  $\varphi \in \mathfrak{S}_P$  induit une bijection sur l'ensemble des sommets, et applique triplet libre sur triplet libre. *Indication* : on pourra utiliser (sans démonstration) que les sommets de  $P$  sont précisément les points de  $P$  qui se trouve sur la sphère-unité de  $\mathbb{R}^3$ .

**f)** Montrer que tout  $\varphi \in \mathfrak{S}_P$  applique le barycentre d'une face de  $P$  sur le barycentre d'une face de  $P$ . *Indication* : Montrer d'abord que  $\varphi$  applique le barycentre de la face  $S_1S_2S_3$  sur le barycentre de l'enveloppe convexe de  $\varphi(S_1)\varphi(S_2)\varphi(S_3)$ , et ensuite que  $\varphi(S_1)\varphi(S_2)\varphi(S_3)$  est un triangle équilatéral et forme donc une face de  $P$ .

**g)** Soit  $B$  l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  passant par le barycentre d'une face de  $P$ . Montrer que  $B$  contient quatre droites, et que tout  $\varphi \in \mathfrak{S}_P$  applique une droite de  $B$  sur une droite de  $B$ . En déduire un morphisme de groupes  $\rho : \mathfrak{S}_P \rightarrow \mathfrak{S}_4$ . Montrer que le noyau de ce morphisme est  $\{\pm id_{\mathbb{R}^3}\}$ .

**h)** Montrer que le déterminant induit un morphisme de groupes surjectif  $\mathfrak{S}_P \rightarrow \{\pm 1\}$  dont le noyau est  $\mathfrak{S}_P^+ = \mathfrak{S}_P \cap SO(3)$ . En déduire un isomorphisme de groupes  $\mathfrak{S}_P \cong \mathfrak{S}_P^+ \times \{\pm 1\}$ .

**i)** Montrer que pour tout couple de droites distinctes  $b_1, b_2 \in B$  il existe deux faces de  $P$  ayant une arête commune et telles que  $b_1, b_2$  passent par leur barycentre respectif. En déduire que la réflexion  $s_H$  par rapport à l'hyperplan  $H$  contenant cette arête permute les deux droites.

**j)** Déduire de ce qui précède que l'image  $\rho(\mathfrak{S}_P)$  contient toutes les transpositions de  $\mathfrak{S}_4$ . Conclure qu'on a des isomorphismes de groupes  $\mathfrak{S}_P^+ \cong \mathfrak{S}_4$  et  $\mathfrak{S}_P \cong \mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$ .

\* \*  
\*