Examen “Groupes et Géométrie” du 23 juin 2014

3 heures

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. Groupe linéaire et droite projective sur un corps premier.

Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments et $G = Gl_2(\mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On note $U = U_2(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que $a_{1,2} \in \mathbb{F}_p$, $a_{2,1} = 0$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$.

a) Montrer que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$ possède $(p^2-1)(p^2-p)$ bases vectorielles. En déduire l'ordre du groupe G.

b) Montrer que U est un p-Sylow de G et que U n'est pas distingué dans G.

c) Montrer que tout élément d'ordre p de G est conjugué à un élément de U.

d) On note T le sous-groupe des matrices scalaires inversibles $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, de G. Montrer que T est distingué dans G. Quel est l'ordre du groupe-quotient G/T ?

e) On rappelle que la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$. Montrer que le cardinal de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est $p+1$. En faisant agir G sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$, construire un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{p+1}$.

f) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = T$. En déduire un morphisme de groupes injectif $\psi : G/T \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Montrer que ψ est un isomorphisme pour $p = 2, 3$.

* *
*

Exercice 2. Soit D_8 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(2)$ engendré par la rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la symétrie orthogonale σ qui envoie (x,y) sur $(x,-y)$.

a) Décrire géométriquement l'élément $\sigma\rho\sigma^{-1}$.

b) Soit X l'ensemble des points $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$.
Vérifier que pour tout $x \in X$, on a $\rho(x) \in X$ et $\sigma(x) \in X$.
On en déduit une action $D_8 \times X \to X$.

c) En identifiant X à l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, en déduire un morphisme de groupes $\varphi : D_8 \to \mathfrak{S}_4$. Expliciter $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\rho)$.

d) Montrer que φ est *injectif.*

e) En déduire que $\varphi(D_8)$ est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

* *
*

Exercice 3. On considère les points $A = (1,1,0), B = (-1,1,0), C = (-1,-1,0), D = (1,-1,0), E = (0,0,1), F = (0,0,-1)$ de $\mathbb{R}^3$. On note H le plan contenant A, B, C, D et s_H la réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^3$ admettant H comme plan de symétrie.

a) Montrer que s_H applique les segments $[A,E],[B,E],[C,E]$ et $[D,E]$ sur les segments $[A,F],[B,F],[C,F]$ et $[D,F]$. Montrer que ces segments ont tous la même longueur.

b) Montrer que les segments $[A,B],[B,C],[C,D],[D,A]$ ont tous la même longueur. En déduire que chacun de ces quatre segments forme la base de deux triangles isocèles, l'un ayant un sommet en E, l'autre en F. Décrire l'action de s_H sur l'ensemble de ces triangles.

c) On note P l'enveloppe convexe de $\{A, B, C, D, E, F\}$. Déterminer le nombre de faces et le nombre d'arêtes du polyèdre P. Vérifier la formule d'Euler. Le polyèdre P est-il régulier ?

d) Montrer qu'une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$ qui préserve P, preserve nécessairement les ensembles $\{A, B, C, D\}$ et $\{E, F\}$. En déduire que le sous-groupe de $\mathrm{O}(3)$ des isométries de P s'identifie au produit direct du groupe diédral D_8 et de $\mathfrak{S}_2$.

e) Quelle dilatation faut-il appliquer à A, B, C, D (en fixant E et F) pour obtenir une enveloppe convexe $\tilde{P}$ qui soit un polyèdre régulier ? De quel polyèdre régulier s'agit-il ? Le groupe des symétries orthogonales de $\tilde{P}$ est-il plus grand ou plus petit que celui de P ?

* *
*

Barème indicatif : 6.5 + 6.5 + 7