Examen du 6 janvier 2015
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Projection stéréographique. On représente les points de la sphère-unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des couples $(\xi, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que $\|\xi\|^2 + x^2 = 1$.

1.a. Montrer que l'application $\phi : [-1, 1[\to [\frac{1}{2}, \infty[$ définie par $\phi(x) = \frac{1}{1-x}$ est un homéomorphisme. *Indication:* Construire l'application inverse.

1.b. On pose $S^n_+ = \{(\xi, x) \in S^n \,|\, x \geq 0\}$ et $S^n_- = \{(\xi, x) \in S^n \,|\, x \leq 0\}$. Montrer que S^n_+ et S^n_- sont des parties compactes de S^n vérifiant $S^n_+ \cup S^n_- = S^n$. Montrer que l'intersection $S^n_+ \cap S^n_-$ s'identifie à la sphère-unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$.

1.c. Déterminer les composantes connexes de $S^n - S^{n-1}$.

1.d. On note $P = (0, 1) \in S^n$ le "pôle-nord". Montrer que l'application $\Phi : S^n - \{P\} \to \mathbb{R}^n : (\xi, x) \mapsto \phi(x)\xi$ est un homéomorphisme. *Indication:* Montrer que $\Psi(\xi) = (\lambda\xi, 1 - \lambda)$ pour $\lambda = \frac{2}{1+\|\xi\|^2}$ est l'application inverse de Φ.

1.e. Montrer qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ possède un complémentaire compact dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\Phi^{-1}(U) \cup \{P\}$ est un ouvert de S^n.

2. Compactification d'Alexandroff. Soit E un espace topologique séparé.

2.a. On pose $\widehat{E} = E \cup \{\infty\}$. On dit que $U \subset \widehat{E}$ est un ouvert de $\widehat{E}$ si soit U est un ouvert de E soit U contient ∞ et le complémentaire $\widehat{E} - U$ est une partie compacte de E. Montrer que les ouverts de $\widehat{E}$ forment une topologie.

2.b. On considère $\mathbb{N}$ comme un espace discret. Montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ est compacte si et seulement si elle est finie. En déduire une description des ouverts de $\widehat{\mathbb{N}}$. Conclure que la suite $x_n = n$ converge vers ∞ dans $\widehat{\mathbb{N}}$.

2.c. Montrer que $x \in E$ possède un voisinage compact dans E si et seulement s'il existe deux ouverts disjoints U et V dans $\widehat{E}$ tels que $x \in U$ et $\infty \in V$.

2.d. Montrer que $\widehat{E}$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. *Indication:* Pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $\widehat{E}$ par des ouverts il existe $i_0 \in I$ tel que $\infty \in U_{i_0}$; les ouverts U_i tel que $i \neq i_0$ recouvrent alors la partie compacte $E - U_{i_0}$ ...

2.e. Montrer que S^n est homéomorphe à $\widehat{S^n - \{P\}}$. En déduire à l'aide de **1.c-d** que $\widehat{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à S^n.

2.f. Montrer que pour une application continue $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^m$;

(ii) l'application continue $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ s'étend en une application continue $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}^m} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ en posant $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$.

3. Régularité des mesures boréliennes. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des parties boréliennes de $\mathbb{R}^n$, et $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure *borélienne*, c'est-à-dire $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

3.a. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est un exemple de mesure borélienne. Montrer que toute partie bornée mesurable A vérifie $\mu(A) < \infty$.

3.b. Montrer que pour une suite décroissante $(A_n)_{n\geq 0}$ de parties bornées mesurables telles que $\bigcap_{n\geq 0} A_n = B$ on a $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(B)$. *Indication:* considérer la suite croissante $B_n = A_0 - A_n$ et utiliser que $\bigcup_{n\geq 0} B_n = A_0 - B$.

3.c. Montrer que toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts. (Etudier $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \frac{1}{n+1}\}$). En déduire que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, on a:

$$\mu(K) = \inf_{K \subset U \text{ ouvert}} \mu(U).$$

Une partie mesurable A est dite *ϵ-entourée* s'il existe une partie fermée F et une partie ouverte U telles que $F \subset A \subset U$ et $\mu(A - F) \leq \epsilon$ et $\mu(U - A) \leq \epsilon$.

3.d. Montrer que si A est ϵ-entourée alors $\mathbb{R}^n - A$ également. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties mesurables telle que pour tout $n \geq 0$, A_n soit $\frac{\epsilon}{2^n}$-entourée, alors la réunion $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ est 2ϵ-entourée.

3.e. Montrer que toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est réunion d'une suite croissante de parties compactes de $\mathbb{R}^n$. En déduire que la tribu des parties boréliennes $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les parties compactes de $\mathbb{R}^n$.

3.f. Montrer que tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ est ϵ-entouré pour tout $\epsilon > 0$ (**3.c**). En déduire à l'aide de **3.d-e** que toute partie mesurable A est ϵ-entouré pour tout $\epsilon > 0$. Conclure finalement que pour toute partie mesurable A, on a

$$\sup_{A \supset F \text{ fermé}} \mu(F) = \mu(A) = \inf_{A \subset U \text{ ouvert}} \mu(U).$$

Barème indicatif: 6 + 7 + 7