Examen du 17 décembre 2013
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. Frontière et densité. Soient les parties $A \subseteq \mathbb{R}^m$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$. On rappelle que la frontière $\mathrm{Fr}(A)$ est définie comme l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^m$ tels que tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant x rencontre à la fois A et $\mathbb{R}^m \backslash A$.

1.a. Etablir les égalités $\overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^m \backslash A} = \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$.

1.b. Ecrire $\mathbb{R}^m \backslash \mathrm{Fr}(A)$ comme une réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^m$. En déduire que si $\mathbb{R}^m \backslash \mathrm{Fr}(A)$ est connexe alors soit A est dense soit $\mathbb{R}^m \backslash A$ est dense.

1.c. Montrer $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \backslash (A \times B) = ((\mathbb{R}^m \backslash A) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n \backslash B))$. En déduire l'inclusion $(\mathrm{Fr}(A) \times B) \cup (A \times \mathrm{Fr}(B)) \subseteq \mathrm{Fr}(A \times B)$.

1.d. Expliciter **1.c** dans le cas $m = n = 1$, $A = B = [0,1]$ et dans le cas $m = n = 1$, $A = B = \mathbb{Q}$. Que constatez-vous ?

2. Connexité et point fixe. On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x = y\}$.

2.a. Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$. Montrer qu'une partie connexe Γ de $\mathbb{R}^2$ qui rencontre toutes les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$ rencontre également Δ.

2.b. Soit Γ une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ qui ne rencontre pas Δ. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - y$ est à signe constant sur Γ. En déduire que si Γ est contenu dans une bande $\mathbb{R} \times [-N,N]$ alors Γ est contenu soit dans $[-N,\infty[\times[-N,N]$ soit dans $]-\infty,N] \times [-N,N]$.

2.c. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé et connexe. Montrer que f possède un point fixe si et seulement si Γ_f rencontre Δ. En déduire (à l'aide de **2.b**) que si f est continue et bornée alors f admet un point fixe.

2.d. Montrer que le graphe $\Gamma_g \subset [-1,1] \times [-1,1]$ d'une fonction continue $g : [-1,1] \to [-1,1]$ est compact et connexe. Montrer que les deux projections d'une partie compacte connexe de $([-1,1]\times[-1,1]) \backslash \Delta$ sont des intervalles fermés de $[-1,1]$ ne contenant pas simultanément -1 et 1. En déduire que g possède un point fixe.

3. Mesures à support fini sur $\mathbb{R}^n$. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\delta_x : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de Dirac définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

3.a. Montrer que δ_x est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

3.b. Montrer que pour toute fonction étagée $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta_x = f(x).$$

3.c. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe un ouvert U_μ maximal de $\mathbb{R}^n$ de mesure $\mu(U_\mu) = 0$. Le *support de la mesure* μ est défini par $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n \backslash U_\mu$. Montrer que $\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\}$.

3.d. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support ponctuel $\{x\}$. Montrer que $\mu = \lambda\delta_x$ pour un réel $\lambda \geq 0$. *Indication:* On pourra montrer que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ contenant x on a $\mu(A) = \mu(\{x\})$ en calculant $\mu(A\backslash\{x\})$.

3.e. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ dont le support est fini, i.e. $\mathrm{supp}(\mu) = \{x_1, \dots, x_N\}$.

Montrer que $\mu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta_{x_i}$ pour des réels $\lambda_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

d'abord pour une fonction étagée f, ensuite pour une fonction μ-intégrable f.

Barême indicatif: 6 + 6 + 8