UNSA – MESURE ET TOPOLOGIE – **L3 2015-2016**

Contrôle du 1 décembre 2015
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. Algèbres et mesures. Soit $\mathcal{A}$ une *algèbre* sur un ensemble X, i.e. une collection $\mathcal{A}$ de parties (dites mesurables) de X telle que

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$;
3. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, i.e. une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;
3. Si $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ alors $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sup_n \mu(A_n)$.

1.a. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A/B \in \mathcal{A}$.

1.b. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

1.c. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A \cup B) - \mu(A \cap B) = \mu(A \Delta B)$ où $A \Delta B = A \backslash B \cup B \backslash A$.

2. Soit $\mathcal{A}$ la collection des parties $A \subset \mathbb{N}$ ayant la propriété que soit A est fini soit son complémentaire $\mathbb{N} \backslash A$ est fini.

2.a. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{N}$.

2.b. Montrer que $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ définie par ($\mu(A) = 0 \iff A$ fini) vérifie bien les deux premières propriétés d'une mesure, mais pas la troisième.

3. Mesures à support ponctuel sur $\mathbb{R}$. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ désigne la tribu des parties boréliennes sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta_x : \mathcal{B}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

3.a. Montrer que δ_x est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ (la *mesure de Dirac* en x).

3.b. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ telle que $\mu(\mathbb{R} \backslash \{x\}) = 0$. Montrer que $\mu = \lambda \delta_x$ pour un réel $\lambda \geq 0$. (On pourra montrer que pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ contenant x on a $\mu(A) = \mu(\{x\})$ en calculant $\mu(A \backslash \{x\})$.)

3.c. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ telle que $\mu(\mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_N\}) = 0$. Ecrire μ comme une combinaison linéaire de mesures de Dirac. Quand est-ce que μ est une mesure de probabilité ?

BARÊME INDICATIF: (1+1,5+1)+(1+2)+(1+1+1,5)