

Contrôle du 2 octobre 2017

Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. Adhérence, intérieur et frontière.

On suppose que E est un espace topologique et A, B deux parties de E . Soit $f : E \rightarrow E'$ une application continue et C une partie de E' .

1.a. Rappeler la définition de l'adhérence \overline{A} , de l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et de la frontière $\text{Front}(A)$ de A .

1.b. Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

1.c. Montrer que si $A \subset B$ alors $\text{Front}(A) \not\subset \text{Front}(B)$ en général.

1.d. Montrer que si $A \subset B$ et $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B}$ alors $\text{Front}(A) \subset \text{Front}(B)$.

1.e. Montrer que $f^{-1}(\overset{\circ}{C}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(C)}$.

1.f. Montrer que si f applique ouvert sur ouvert alors $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.

1.g. Montrer que si f applique ouvert sur ouvert alors on a égalité dans **1.e**.

1.h. Montrer que les deux projections $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et appliquent ouvert sur ouvert.

1.i. Montrer que pour deux parties A, B de \mathbb{R} telles que

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{A \times B} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$$

on a $\text{Front}(A \times B) \subset (\text{Front}(A) \times B) \cup (A \times \text{Front}(B))$.

1.j. Vérifier hypothèses et conclusion de **1.i.** pour $A = B = [0, 1]$. Que constatez-vous ?.