Contrôle du 13 octobre 2016
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. Intérieur et adhérence. On suppose que (E, d) est un espace métrique.

1.a. Rappeler la définition de l'intérieur $\overset{o}{A}$ d'une partie A de E.
1.b. Montrer les quatre propriétés suivantes pour des parties A, B de E:

(1) $\overset{o}{A} \subset A$;

(2) $A \subset B \implies \overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$;

(3) $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset (A \cup B)^o$;

(4) $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = (A \cap B)^o$

1.c. Montrer que pour une partie A de E l'application $d(A, -) : E \to \mathbb{R}$ défini par $d(A, x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ est une application continue.
1.d. Déduire de **1.c.** que $\overline{A} = \{x \in E \,|\, d(A, x) = 0\}$. En déduire que l'adhérence de A peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts de E.

2. Densité et continuité. Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle-unité.

2.a. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$ est une application continue. Quelle est son image ?
2.b. Quels sont les ouverts de S^1 muni de sa topologie induite de $\mathbb{R}^2$. En déduire que l'application f est également une application continue quand on la considère comme application $\mathbb{R} \to S^1$.
2.c. Montrer que toute application continue surjective applique partie dense sur partie dense.
2.d. Déduire de ce qui précède que S^1 possède une partie dense dénombrable.

Barème indicatif: 6 + 4