Examen du 7 avril 2016

1 heure

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. — **Demi-tours et simplicité de $SO(3)$.** Une rotation $\varphi \in SO(3)$ d'axe D et d'angle π est dite un *demi-tour* autour de l'axe D.

a) Quelle est la matrice d'un demi-tour autour de D dans un repère orthonormé (e_1, e_2, e_3) tel que $D = \mathbb{R}e_1$? En déduire que le composé de deux demi-tours φ_1, φ_2 autour d'axes D_1, D_2 tels que $D_1 \perp D_2$ est un demi-tour autour de l'axe $D_3 = (D_1 \oplus D_2)^\perp$.

b) Soit φ_1 (resp. φ_2) un demi-tour autour de D_1 (resp. D_2). Montrer que, quelques soient $D_1 \neq D_2$, le composé $\varphi_2\varphi_1$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle. En déduire que toute rotation s'écrit comme le composé de deux demi-tours. Conclure que le groupe $SO(3)$ est engendré par les demi-tours.

c) Soient $\varphi, \varphi_1 \in SO(3)$. Montrer que si φ_1 est un demi-tour autour de D_1 alors $\varphi_2 = \varphi\varphi_1\varphi^{-1}$ est un demi-tour autour de $D_2 = \varphi(D)$. En déduire que les demi-tours forment une classe de conjugaison de $SO(3)$.

d) On suppose que H est un sous-groupe distingué de $SO(3)$ non réduit à l'élément neutre. Montrer que H contient une rotation r_α d'angle $\alpha \in]0, \pi]$. En déduire que H contient également une rotation r_β d'angle $\beta \in [\pi/2, \pi]$.

e) On admet que pour la rotation r_β de (d) il existe une droite vectorielle D tq. $D \perp r_\beta(D)$. On notera φ_D le demi-tour autour de D. Montrer que le composé $\varphi_D r_\beta \varphi_D^{-1} r_\beta^{-1}$ appartient à H et montrer à l'aide de (c), (a) qu'il représente un demi-tour. En déduire à l'aide de (b), (c) que $H = SO(3)$. Conclure que $SO(3)$ est simple.

* *
*

Exercice 2. — **Triangle et tétraèdre réguliers.**

a) Montrer que l'enveloppe convexe T des trois points $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ est un triangle équilatéral de $\mathbb{R}^2$ dont le barycentre est l'origine de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que l'origine de $\mathbb{R}^3$ est le barycentre de l'enveloppe convexe Δ des quatre points

$$(0, 0, \frac{3}{2\sqrt{2}}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}), (0, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}).$$

Combien d'arêtes et de faces possède le polyèdre convexe Δ. Vérifier la formule d'Euler.

c) Montrer que les arêtes de Δ ont toutes la même longueur.

d) Soit α une arête de Δ. On note H_α l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ contenant α et s_α la réflexion par rapport à H_α. Montrer que s_α fixe deux sommets de Δ et échange les deux autres.

e) On note $\mathcal{I}_\Delta$ le sous-groupe de $O(3)$ formé des transformations qui laissent stable l'ensemble des sommets de Δ. Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathcal{I}_\Delta$ induisent la même application sur les sommets alors $\varphi = \psi$. Montrer à l'aide de (d) que toute permutation de l'ensemble des sommets de Δ qui laisse fixe deux d'entre eux provient d'un élément de $\mathcal{I}_\Delta$. En déduire que $\mathcal{I}_\Delta \cong \mathfrak{S}_4$

Barème indicatif : 5 + 5