Examen du 25 février 2016

1 heure

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. Permutations.

a) Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ suivante :

i	1	2	3	4	5	6
$\sigma(i)$	4	6	3	1	2	5

b) Quel est l'ordre de la permutation σ ? Quelle est sa signature ?

c) Montrer que σ est conjugué dans $\mathfrak{S}_6$ au produit de cycles suivants $\sigma_1 = (1,2)(3,4,5)$ et préciser un $\tau \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma$.

d) Donner un élément $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_6$ ayant le même ordre que σ mais qui n'est pas conjugué à σ.

* *
*

Exercice 2. Groupe linéaire du plan sur un corps premier.

Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments et $G = Gl_2(\mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On note $U = U_2(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que $a_{1,2} \in \mathbb{F}_p$, $a_{2,1} = 0$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$.

a) Montrer que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$ possède $(p^2-1)(p^2-p)$ bases vectorielles. En déduire l'ordre du groupe G.

b) Montrer que U est un p-Sylow de G et que U n'est pas distingué dans G.

c) On note T le sous-groupe des matrices scalaires inversibles $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, de G. Montrer que T est distingué dans G. Quel est l'ordre du groupe-quotient G/T ?

d) On note $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^2$. Montrer que le cardinal de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$ est $p+1$. *Indication :* on pourra utiliser qu'une droite vectorielle est donnée par un vecteur non-nul à une constante multiplicative non-nulle près.

e) En faisant agir le groupe G sur l'ensemble $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$, construire un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = T$.

f) En déduire un morphisme de groupes injectif $\psi : G/T \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Montrer que ψ est un isomorphisme pour $p = 2, 3$.

* *
*

Barème indicatif : 4 + 6