Examen du 16 décembre 2013
Durée : 2h00. Tous documents interdits.

1. Soit $(l_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ et $l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$ pour $n \geq 0$. On note $L(X) = \sum_{n\geq 0} l_n X^n$ la série formelle associée.

1.a. Montrer que $L(X) = \frac{X-2}{X^2+X-1}$.

1.b. Montrer que $L(X) = \frac{-r}{X-r} + \frac{-s}{X-s}$ où r, s désignent les deux racines de $X^2 + X - 1$. En déduire une formule exprimant l_n en fonction de n.

1.c. Montrer qu'on a $\frac{2X+1}{X^2+X-1} = \frac{2-L(X)}{X} = -\sum_{n\geq 0} l_{n+1} X^n$.

1.d. En déduire l'identité $\sum_{n\geq 0} l_{n+1} \frac{X^{n+1}}{n+1} = -\ln(1 - X - X^2)$ dans $\mathbb{R}[[X]]$.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2.a. Indiquer une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2.b. En déduire $exp(A)$.

2.c. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

2.d. Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|\phi(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ soit minimal.

3.a. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ vérifiant l'équation différentielle $y''(x) - y(x) = f_i(x)$ dans les quatre cas suivants: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \frac{e^x}{2}$, $f_3(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ et $f_4(x) = \mathrm{ch}(x)$.

3.b. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ vérifiant l'équation différentielle $y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = (3x - 4)e^x$.

Barème indicatif : 6 + 7 + 7 (la question 2.d étant hors barème)