UNSA – COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE – **L2 2010-2011**

Examen du 14 décembre 2010
Durée : 2h00. Tous documents interdits.

1. Suites récurrentes et séries formelles. On considère la suite de nombres $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par la règle de récurrence

$$s_0 = 1,\ s_1 = 0,\ s_n = \frac{1}{2}(s_{n-1} + s_{n-2}),\ n \geq 2.$$

On pose $s(X) = \sum_{n\geq 0} s_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

1.a. Déterminer s_n pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

1.b. Montrer que $s(X) = \frac{X-2}{X^2+X-2}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

1.c. Décomposer $\frac{X-2}{X^2+X-2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}[[X]]$.

1.d. En déduire une formule explicite pour s_n, ainsi que la limite $\lim_{n\to\infty} s_n$.

2. Equations différentielles du second ordre.

2.a. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = xe^{-3x}$.

2.b. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = 0$.

2.c. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = \sin(2x)$.

3. Exponentielle de matrice et équation différentielle linéaire. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

3.a. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire une matrice de changement de base $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

3.b. Calculer P^-1.

3.c. Calculer $exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3.d. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

Que peut-on dire de la trajectoire $t \mapsto \phi(t)$ quand $t \to \pm\infty$?

BARÈME INDICATIF : **7 + 6 + 7 = 20 pts**