Examen du 18 décembre 2009
Durée : 2h00. Tous documents interdits.

Barème indicatif : 4 + 6 + 4 + 6

1. Injectivité, surjectivité, bijectivité.

1.a. Soient $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to E_3$ et $h : E_3 \to E_4$ des applications ensemblistes. On suppose que $g \circ f : E_1 \to E_3$ et $h \circ g : E_2 \to E_4$ sont bijectives.

Montrer que g est une application à la fois surjective et injective. En déduire que f, g et h sont des applications bijectives.

1.b. Soit $f : E \to E$ une application ensembliste. On suppose que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que si f est injective, alors f est surjective. Montrer que si f est surjective, alors f est injective. En déduire que si f n'est pas bijective, alors f n'est ni injective ni surjective.

2. Décomposition en éléments simples et série formelle. Soit la fraction rationnelle

$$s(X) = \frac{3}{2 - X - X^2}.$$

2.a. Décomposer $s(X)$ en éléments simples.

2.b. Soit $(s_n)_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie par

$$s_0 = \frac{3}{2},\ s_1 = \frac{3}{4},\ s_{n+2} = \frac{1}{2}(s_{n+1} + s_n) \text{ pour } n \geq 0.$$

Montrer que la série formelle $\sum_{n \geq 0} s_n X^n$ s'identifie à la fraction rationnelle $s(X)$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

2.c. Déduire de **2.a** et **2.b** une formule explicite pour s_n, $n \geq 0$. Déterminer $\lim_{n \to \infty} s_n$.

3. Equations différentielles du second ordre.

3.a. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = xe^{2x}$.

3.b. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = 0$.

3.c. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$.

4. Exponentielle de matrice et équation différentielle linéaire. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.a. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire une matrice de changement de base $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4.b. Calculer $exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

4.c. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

Que peut-on dire de $\|\phi(t)\|$ quand $t \to \infty$?

Corrigé

1.a. Puisque $g \circ f$ est surjective, g est surjective. De même, puisque $h \circ g$ est injective, g est injective. Par conséquent, g est bijective et admet donc une application réciproque g^{-1}. En outre, on remarque que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, et que $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$. Comme la composée de deux bijections est une bijection, on en déduit que f et h sont bijectives.

1.b. Supposons que f soit injective, et soit $y \in E$. On a $f(y) = f(f(f(y)))$, et donc, puisque f est injective, $y = f(f(y))$. Ceci montre que y possède un antécédent par f (qui est $f(y)$), et donc que f est surjective.

Réciproquement, supposons f surjective, et soient x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. La composée de deux surjections étant surjective, $f \circ f$ est surjective et donc il existe t_1 et t_2 dans E tels que $x_1 = f(f(t_1))$ et $x_2 = f(f(t_2))$. On a donc $f(f(f(t_1))) = f(f(f(t_2)))$, ce qui se réécrit $f(t_1) = f(t_2)$. En composant par f, ceci entraîne $x_1 = x_2$, ce qui prouve l'injectivité de f.

On a prouvé que f injective $\iff$ f surjective, ce qui est équivaut à

$$f \text{ injective } \textbf{ou} \text{ surjective} \Longrightarrow f \text{ bijective},$$

ou encore à sa contraposée :

$$f \text{ non bijective} \Longrightarrow f \text{ non injective } \textbf{et} \text{ non surjective}.$$

2.a. On a $2 - X - X^2 = -(X^2 + X - 2) = -(X + 2)(X - 1) = (2 + X)(1 - X)$. Il s'ensuit que

$$\frac{3}{2 - X - X^2} = \frac{3}{(2 + X)(1 - X)} = \frac{a}{2 + X} + \frac{b}{1 - X}.$$

On obtient $3 = a(1 - X) + b(2 + X)$ ce qui donne $a = b = 1$ en posant respectivement $X = -2$ et $X = 1$.

2.b. La fraction rationnelle $s(X)$ est déterminée de manière unique par la relation $s(X)(2-X-X^2)=3$. On va montrer que son développement en série formelle $s(X)=\sum_{n\geq 0} s_n X^n$ vérifie

$$s_0 = \frac{3}{2},\ s_1 = \frac{3}{4},\ s_{n+2} = \frac{1}{2}(s_{n+1}+s_n) \text{ pour } n \geq 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
3 &= \left(\sum_{n\geq 0} s_n X^n\right)\left(2-X-X^2\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} 2s_n X^n - \sum_{n\geq 0} s_n X^{n+1} - \sum_{n\geq 0} s_n X^{n+2} \\
&= 2s_0 + (2s_1 - s_0)X + \sum_{n\geq 0}(2s_{n+2} - s_{n+1} - s_n)X^{n+2} \\
&\Longleftrightarrow 2s_0 = 3, \quad 2s_1 - s_0 = 0, \quad 2s_{n+2} - s_{n+1} - s_n = 0 \text{ pour } n \geq 0, \\
&\Longleftrightarrow s_0 = \frac{3}{2}, \quad s_1 = \frac{3}{4}, \quad s_{n+2} = \frac{1}{2}(s_{n+1}+s_n) \text{ pour } n \geq 0.
\end{aligned}$$

2.c. D'après **2.a-b** on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} s_n X^n &= \frac{1}{2+X} + \frac{1}{1-X} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{X}{2}}\right) + \frac{1}{1-X} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{X}{2}\right)^n + \sum_{n\geq 0} X^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)X^n
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, \text{ et } \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

3.a. L'équation caractéristique $r^2+r-6=(r+3)(r-2)=0$ a deux racines réelles $r=2$ et $r=-3$. Par conséquent, les solutions réelles de l'équation homogène $y''+y'-6y=0$ sont $y(x)=\mu_1 e^{2x}+\mu_2 e^{-3x}$ pour $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation inhomogène $y''+y'-6y=xe^{2x}$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. Cette solution particulière est de la forme $y(x)=P(x)e^{2x}$ pour un polynôme $P(x)=a+bx+cx^2$ de degré 2. Pour déterminer $P(x)$ on substitue $y(x)=$

$P(x)e^{2x}$ dans l'équation inhomogène. Ceci donne

$$\begin{aligned} y'(x) &= P'(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} \\ y''(x) &= P''(x)e^{2x} + 2P'(x)e^{2x} + 2P'(x)e^{2x} + 4P(x)e^{2x} \\ y''(x) + y'(x) - 6y(x) &= (P''(x) + 5P'(x))e^{2x} = xe^{2x} \\ &\iff P''(x) + 5P'(x) = x \\ &\iff 2c + 5(b + 2cx) = x \iff 2c + 5b = 0 \text{ et } 10c = 1 \\ &\iff c = \frac{1}{10},\ b = -\frac{1}{25} \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions rélles de $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ sont

$$y(x) = \left(\mu_1 - \frac{x}{25} + \frac{x^2}{10}\right) e^{2x} + \mu_2 e^{-3x}, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

3.b. L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ a deux racines complexes conjuguées $r = \pm 2i$. Les solutions réelles de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ sont donc

$$y(x) = \mu_1 \cos(2x) + \mu_2 \sin(2x) \text{ pour } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

3.c. Les solutions réelles de l'équation inhomogène $y''+4y = \cos(2x)$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. La solution particulière réelle s'obtient comme partie réelle d'une solution particulière complexe de $y'' + 4y = e^{2ix}$ car $\mathrm{Re}(e^{2ix}) = \cos(2x)$. Une telle solution particulière s'obtient sous la forme $y(x) = P(x)e^{2ix}$ pour un polynôme $P(x)$ de degré 1. En substituant dans l'équation inhomogène on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= P'(x)e^{2ix} + 2iP(x)e^{2ix} \\ y''(x) &= 2iP'(x)e^{2ix} + 2iP'(x)e^{2ix} + 4i^2 P(x)e^{2ix} \\ &= (4iP'(x) - 4P(x))e^{2ix} \\ y''(x) + 4y(x) &= 4iP'(x)e^{2ix} = e^{2ix} \iff 4iP'(x) = 1 \end{aligned}$$

Donc pour $P(x) = a + bx$ on obtient $4ib = 1$, d'où $b = -\frac{i}{4}$. Une solution particulère est donc $y(x) = \mathrm{Re}(-\frac{ix}{4}e^{2ix}) = -\frac{x}{4}\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{x}{4}\sin(2x)$. La solution générale de $y'' + 4y = \cos(2x)$ est par conséquent

$$y(x) = \mu_1 \cos(2x) + (\mu_2 + \frac{x}{4}) \sin(2x), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

4.a. Le polynôme caractéristique de A vaut

$$P_A(X) = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X-4).$$

La matrice A possède donc deux valeurs propres (les racines de $P_A(X)$) qui sont 1 (de multiplicité 2) et 4 (qui est simple).
Les sous espaces propres associés sont respectivement

$$E_1 = Ker(A - I_3) = Vect\{(-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$

et

$$E_4 = Ker(A - 4I_3) = Vect\{(1, 1, 1)\}.$$

Vu que les dimensions des sous-espaces propres coïncident avec les multiplicités des valeurs propres, A est diagonalisable.
En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4.b. D'après la question précédente, on a $tA = t(PDP^{-1}) = P(tD)P^{-1}$, donc

$$exp(tA) = exp(P(tD)P^{-1}) = Pexp(tD)P^{-1}$$

Or, la matrice $exp(tD)$ est facile à calculer, car tD est diagonale : on a

$$exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Reste à calculer P^{-1}, puis le produit donnant $exp(tA)$.
On trouve $exp(tA) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & 2e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & -e^t + e^{4t} & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}$.

4.c. La fonction cherchée est

$$\phi(t) = exp(tA). \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Quant à la norme, elle vaut

$$\|\phi(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{3}e^{4t}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque $t \to \infty$.