Feuille d'exercices n^o 6

1. Déterminer les valeurs et espaces propres des matrices $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in M_4(\mathbb{R})$, puis diagonaliser si possible.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 1 & 0 & 1+m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

3. On considère la règle de récurrence $a_{n+3} = 2a_n + a_{n+1} - 2a_{n+2}$ $(*)$. L'espace vectoriel réel des suites de nombres réels vérifiant $(*)$ sera noté E.

3.a. Calculer le polynôme caractéristique $p_X(t) = det(X - tI_3)$ de la matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$X \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix}$$

pour tout $(a_n)_{n\geq 0} \in E$ et tout $n \geq 0$.

3.b. Indiquer une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

3.c. En déduire une expression pour X^k, $k \geq 0$, et pour X^{-1}.

3.d. Trouver une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0} \in E$ telle que $a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7$.

4.a. Montrer que $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$ si $AB = BA$ où $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
4.b. Montrer que $exp(A) \in Gl_n(\mathbb{C})$ et trouver $exp(A)^{-1}$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.
4.c. Que vaut $det(exp(A))$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$?

5.a. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_t = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

6. Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en écrivant $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente, et $DN = ND$.

MOTS-CLÉS : Polynôme caractéristique, valeur propre, espace propre, exponentielle de matrices.