Feuille d'exercices n^o 5

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1.a. Montrer qu'il existe $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = a_2 A + b_2 I_3$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

1.b. Expliciter la matrice de l'application linéaire $x \mapsto Ax$ dans la base $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$

2.a. Expliciter la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.b. Expliciter la matrice de ϕ dans la base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix})$.

2.c. Montrer que ϕ est inversible et expliciter ϕ^{-1}.

3. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & a+c & ac \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix}.$$

4. On notera $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice ayant tous les coefficients nuls sauf celui d'indice ij qui vaut 1.

4.a. Montrer que $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme une base vectorielle de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que le sous-espace engendré par les E_{ii}, $i = 1, \ldots n$, est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{C})$. De même pour le sous-espace engendré par les E_{ij} pour $n \geq i \geq j \geq 1$.

4.b. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$. Montrer que si $tr(AB) = 0$ pour tous $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $B = 0$.

4.c. Montrer que pour $A \in M_2(\mathbb{C})$, on a $\frac{1}{2}(tr(A)^2 - tr(A^2)) = det(A)$.

4.d. Montrer que $det(A - X \cdot Id_2) = X^2 - tr(A) \cdot X + det(A)$ pour $A \in M_2(\mathbb{C})$. Dans quel anneau cette identité a-t-elle lieu ?

Mots-Clés : Matrice (triangulaire, diagonale), trace, déterminant.