Feuille d'exercices n^o 2

1. Soit $(E, *, e)$ un monoïde.

1.a. Soit $e' \in E$ tel que $e' * x = x = x * e'$ pour tout $x \in E$. Montrer $e = e'$.

1.b. On fixe $x \in E$. Soient $y, y' \in E$ des inverses de x. Montrer $y = y'$.

1.c. Soient $(E_1, *_1, e_1)$ et $(E_2, *_2, e_2)$ des monoïdes. Une application $\phi : E_1 \to E_2$ est dite *morphisme de monoïdes* si $\phi(e_1) = e_2$ et $\phi(x *_1 y) = \phi(x) *_2 \phi(y)$ pour $x, y \in E_1$.
Montrer que si y est l'inverse de x, alors $\phi(y)$ est l'inverse de $\phi(x)$. En déduire que si ϕ est surjective, et E_1 est un groupe, alors E_2 est également un groupe.

1.d. Montrer que $(\mathbb{R}, +, 0)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ sont des groupes. Montrer que $\phi(t) = e^{2\pi i t}$ définit un morphisme de groupes $\phi : (\mathbb{R}, +, 0) \to (\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$.

2. On définit une loi de composition $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : (a, b) \mapsto a \oplus b = \frac{ab}{a+b}$.

2.a. Montrer $\frac{1}{a \oplus b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. En déduire que $\oplus$ est associative et commutative.

2.b. Montrer que $(a \oplus b)c = (ac) \oplus (bc)$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

2.c. Peut-on définir une structure de monoïde sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant $\oplus$ (resp. $\cdot$) comme loi de composition ?

3.a. Montrer que l'ensemble $\{0, 1\}$ est une algèbre de Boole pour les opérations $\min = \wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$ et $\max = \vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$.

3.b. Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble $\{0,1\}^E$ des applications $E \to \{0,1\}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Boole. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ s'identifie à $\{0,1\}^E$ en tant qu'algèbre de Boole.

3.c. Pour $x, y \in \{0,1\}$ on définit $x \to y = (\neg x) \vee y$. Montrer que $x \to y = (\neg y) \to (\neg x)$. Exprimer les opérations $\vee$ et $\wedge$ en fonction de $\to$ et $\neg$.

4. Un *anneau de Boole* est un anneau commutatif A tel que $x^2 = x$ pour $x \in A$.

4.a. Montrer que $(\{0,1\}, \oplus, \cdot, 0, 1)$ est un anneau de Boole où $x \oplus y$ désigne le reste de la division par 2 de $x + y$.

4.b. Montrer que pour tout ensemble E, l'ensemble $\{0,1\}^E$ est un anneau de Boole pour $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

4.c. Soient f_A, f_B les fonctions caractéristiques de $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Exprimer $f_A \oplus f_B$ comme fonction caractéristique d'une partie de E. De même pour $f_A f_B$. En déduire une structure d'anneau de Boole sur $\mathcal{P}(E)$.

4.d. Dans $\{0,1\}$, exprimer les opérations $\wedge$ et $\vee$ en fonction des opérations $\oplus$ et $\cdot$, et vice versa.

Mots-Clés : Ensemble structuré, loi de composition, monoïde, groupe, algèbre de Boole.