UNSA – ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE – **L3 2018-2019**

Feuille d'exercices n^{o}6

1. On considère la matrice de Hadamard $H = (h_{ij})$ définie par $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$, en se plaçant dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, <-,->)$ muni du produit scalaire canonique.

1.a. Montrer que $h_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2}dt$.

1.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_x(t) = (\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1})^2$ est continue et à valeurs positives pour $t \in [0, 1]$.

1.c. Déduire de ce qui précède que la forme quadratique associée à H est définie positive.

2. On considère le sous-espace E du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions différentiables $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ engendré par les fonctions $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ pour $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ où $n > 0$.

On munit E de la forme sesquilinéaire symètrique $< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$.

2.a. Montrer que $(E, <-,->)$ est un espace hermitien.

2.b. Montrer que $(e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n})$ est une base orthonormée de E.

2.c. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $< f, f >= \sum_{k=-n}^{k=n} | < f, e_k > |^2$.

2.d. Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin(kt)$ et $t \mapsto \cos(kt)$ appartiennent à E pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Que donne la formule **2.c** dans ce cas ?

3. On considère l'ensemble H_n des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$.

3.a. Est-ce que H_n est un sous-espace vectoriel complexe de $M_n(\mathbb{C})$? Si oui, quelle est sa dimension ?

3.b. Est-ce que H_n est un sous-espace vectoriel réel de $M_n(\mathbb{C})$? Si oui, quelle est sa dimension ?

4. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe un unique couple (H_1, H_2) de matrices hermitiennes tel que $A = H_1 + iH_2$.

Montrer que la matrice A est hermitienne (resp. antihermitienne, resp. normale) si et seulement si $H_2 = 0$ (resp. $H_1 = 0$, resp. $H_1H_2 = H_2H_1$).

5. Soit $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur de norme 1 de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^2, <-,->)$.

5.a. Déterminer les vecteurs $w \in \mathbb{C}^2$ de norme 1 qui sont orthogonaux à v.

5.b. Montrer que toute matrice unitaire spéciale $U \in SU_2(\mathbb{C})$ peut s'écrire

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. En déduire que $SU_2(\mathbb{C}) \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

5.c. Montrer que si l'on omet la condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ alors les matrices ci-dessus forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ de dimension 4 admettant les matrices

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

comme base.

5.d. Montrer les relations $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathbf{1}$. En déduire que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre ayant la propriété que tout élément non nul possède un inverse multiplicatif. (C'est ce qu'on appelle une algèbre à division ou un corps gauche).

Indiquer quelques différences entre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$.

6. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ dans une base orthonormée de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^3, <-,->)$. Pourquoi savait-on sans calcul que A est diagonalisable avec valeurs propres relles ?

7. Soit ϕ un endomorphisme de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^n, <-,->)$ qui se diagonalise dans une base orthonormée.

7.a. Montrer que la matrice A de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vérifie $AA^* = A^*A$. Une telle matrice est dite *normale*.

7.b. Montrer que tout espace propre E_λ de ϕ est stable par A at par A^*. Montrer la même chose pour $(E_\lambda)^\perp$.

7.c. Montrer que toute matrice normale A se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

7.d. Montrer que les matrices hermitiennes, antihermitiennes et unitaires sont normales. Caractériser ces matrices par leurs valeurs propres.

8. On considère $M_n(\mathbb{R})$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On admet que $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

8.a. Rappeler la décomposition polaire $A = OS$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

8.b. Montrer que si $A = OS$ est la décomposition polaire de A, alors $\|A\|^2 = \|S\|^2$ et $\det(A^2) = \det(S^2)$.

8.c. En utilisant que S est diagonalisable dans une base orthonormée, montrer que $(\det(S^2))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\|S\|^2$.

8.d. Déduire de ce qui précède que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie l'inégalité $\sqrt{n}\det(A)^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

8.e. En déduire qu'une matrice $A \in SL_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|A\| \geqslant \sqrt{n}$.

MOTS-CLÉS : Espace euclidien, espace hermitien, matrice (anti)hermitienne, matrice unitaire, matrice normale, décomposition polaire.