Feuille d'exercices n^{o}5

1. Diagonaliser chacune des matrices suivantes à l'aide d'un changement de base orthogonal qu'on précisera:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ${}^tAA$ est symétrique à valeurs propres positives. Si A est symétrique, quel est le lien entre les valeurs propres de ${}^tAA$ et les valeurs propres de A ?

3. Une matrice symétrique réelle est dite (définie) positive si toutes ses valeurs propres sont (strictement) positives.

3.a. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

3.b. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

3.c. Montrer que pour toute matrice symétrique positive S, il existe une et une seule matrice symétrique positive R telle que $R^2 = S$.

4. On note $O_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

4.a. Montrer que $O_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

4.b. Quel est le cardinal de $O_n(\mathbb{Z})$ (resp. de $O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})$) ?

4.c. Montrer que tout $A \in O_n(\mathbb{Z})$ s'écrit comme produit d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale à coefficients entiers.

4.d. La décomposition **4.c** est-elle unique ?

5. Montrer que les seules valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale sont ± 1. En déduire que tout $A \in SO_3(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle 1. Conclure que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ est une rotation que l'on décrira.

6. On pose $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

6.a. Montrer que R est une matrice orthogonale.

6.b. La matrice R est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?

6.c. Montrer que la droite $D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est l'unique espace propre réel de R.

Donner l'équation du sous-espace orthogonal $D^\perp$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $v \in D^\perp$ alors $R(v) \in D^\perp$ (i.e. $D^\perp$ est stable sous R).

6.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$.

Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

6.e. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a,b,c)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4 + (a^2+1)(b^2+c^2) = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a,b,c)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0$.

6.f. Montrer que $A(a,b,0)$ est orthogonale si et seulement si $a^2+b^2 = 1$. Retrouver la conclusion de **6.a** en montrant que $R = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

7. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.

7.a. Montrer que $(E, <-,->)$ est un espace euclidien de dimension 3.

7.b. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ trouver une base orthonormée (L_0, L_1, L_2) de $(E, <-,->)$.

7.c. Montrer que $P \mapsto u(P) = (1-X^2)P'(X) + (2X+1)P(X)$ définit un endomorphisme $u : E \to E$. Ecrire u dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

7.d. Ecrire u dans la base (L_0, L_1, L_2). En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1}(u(P))^2 dt$ en fonction des coefficients (a,b,c) de $P(X) = aL_0 + bL_1 + cL_2$.

8. On considère sur l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, <-,->)$ la forme quadratique

$$q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz \quad \text{pour} \quad v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

8.a. Expliciter $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $q(v) = {}^t vAv$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

8.b. Indiquer une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale. En déduire la signature de la forme quadratique q.

8.c. Trouver des formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbb{R}^3$ telles que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ on ait $q(v) = \pm l_1(v)^2 \pm l_2(v)^2 \pm l_3(v)^2$.

Mots-clés : Matrice symétrique, matrice orthogonale, rotation, espace euclidien, orthonormalisation de Gram-Schmidt, forme quadratique.