Feuille d'exercices n^{o}4

1. On considère les trois formes linéaires $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ définies par

$$\phi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3,\ \phi_2(x) = x_1 + x_2 - x_3,\ \phi_3(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Montrer qu'elles forment une base et déterminer la base duale de $\mathbb{R}^3$.

2. On considére les n formes linéaires $\phi_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, $i = 1, \ldots, n$ définies par

$$\phi_i(x) = x_i + x_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \phi_n(x) = x_n + x_1.$$

Quand est-ce qu'elles forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$? Si c'est le cas déterminer la base duale de $\mathbb{R}^n$. Si ce n'est pas le cas, déterminer l'orthogonal.

3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$.

3.a. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$? Indiquer une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b. Montrer que $\phi_i(P) = P^{(i)}(0)$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3.c. Montrer que le système $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est libre dans $(\mathbb{R}_n[X])^*$. En déduire que c'est une base et déterminer la base duale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.d. Pour un entier naturel k, déterminer l'orthogonal $\{\phi_0, \ldots, \phi_k\}^\perp \subset \mathbb{R}^n$.

4. On considère pour tout entier naturel i, la fonction suivante sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\phi_i(P) = \int_{-1}^{1} t^i P(t) dt.$$

4.a. Montrer que ϕ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b. Montrer que le système $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

5. Hyperplans. Un sous-espace vectoriel de codimension 1 s'appelle *hyperplan*.

5.a. Montrer que le noyau d'une forme linéaire non-nulle ϕ sur $\mathbb{R}^n$ est un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$. On dit que H est défini par ϕ.

5.b. Montrer que deux formes linéaires non-nulles ϕ, ψ définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

5.c. Montrer que pour trois formes linéaires non-nulles ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 avec hyperplans H_1, H_2, H_3 on a $H_3 \supset H_1 \cap H_2$ si et seulement si $\phi_3 \in Vect(\phi_1, \phi_2)$.

5.d. Montrer que n formes linéaires non-nulles sur $\mathbb{R}^n$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ si et seulement si leurs hyperplans ont une intersection réduite à l'origine.

6. Orthogonalité, somme et intersection. Soient V, W deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

6.a. Montrer que $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

6.b. Montrer que $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

6.c. Montrer que les identités **6.a** et **6.b** peuvent être déduites l'une de l'autre par bidualité.

Mots-clés : Formes linéaires, Bases duales, Dualité linéaire.