Feuille d'exercices n^{o}2

1. Déterminer les valeurs et espaces propres des matrices $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in M_4(\mathbb{R})$, puis diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 1 & 0 & 1+m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

3. Soit $R_3 = \{P(X) \in \mathbb{R}[X]\} \,|\, deg(P(X)) \leq 3\}$. On considère l'application $\phi : R_3 \to R_3 : P(X) \mapsto (1 - X^2)P'(X) + (3X + 1)P(X)$.

3.a. Montrer que ϕ est linéaire et donner la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.

3.b. Montrer que ϕ est diagonalisable. Indication : établir $\phi(P) = \lambda P \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{3X+1-\lambda}{X^2-1}$, puis intégrer et résoudre dans R_3.

3.c. Donner une base de R_3 formée par des vecteurs propres de ϕ.

4. Pour chacune des matrices suivantes on se posera les questions suivantes:

4.a. Quel est le polynôme caractéristique ?
4.b. Quelles sont les valeurs propres ?
4.c. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.
4.d. Sinon, la matrice est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

6. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension n. On suppose $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

6.a. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E.

6.b. Ecrire l'endomorphisme u dans cette base.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $\alpha = exp(\frac{2\pi i}{n})$. Soient u, v deux endomorphismes inversibles de E tels que $uv = \alpha vu$.

7.a. Montrer que u et v sont diagonalisables (on pourra considérer les images itérées d'un vecteur propre).

7.b. Peut-on diagonaliser u et v dans la même base ?

8. Trigonaliser A et B en déterminant les noyaux de $(A - \lambda I_4)^n$ et $(B - \mu I_4)^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$, où λ (resp. μ) désigne l'unique valeur propre de A (resp. B).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mots-clés : Endomorphismes diagonalisables, trigonalisables, polynôme et sous-espaces caractéristiques