Partiel du 5 novembre 2020
Durée: 1h30. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Montrer que A possède deux valeurs propres $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ avec $\mu < \lambda$.

1.b. Déterminer les espaces propres E_μ et E_λ de A. La matrice A est-elle diagonalisable/trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

1.c. Quel est le polynôme minimal de A ? Déterminer les sous-espaces caractéristiques $E(\mu)$ et $E(\lambda)$ de A.

1.d. Indiquer une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $J = P^{-1}AP$ se décompose en blocs de Jordan.

1.e. Trouver un couple de matrices $(D, N) \in M_3(\mathbb{R})^2$ tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente, et tel que $A = D + N$ et $DN = ND$. (Il suffira de donner des formules pour N et D faisant intervenir P et P^{-1}).

Existe-t-il beaucoup de couples de matrices ayant ces propriétés ?

2. On considère la matrice $B_m = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$.

2.a. Déterminer le polynôme caractéristique de B_m. En déduire que B_m est diagonalisable si $m \notin \{0, 1, -1\}$.

2.b. Déterminer les espaces propres de B_m pour $m \in \{0, 1, -1\}$. Que constatez-vous ?

2.c. Pour quels $m \in \mathbb{R}$ la matrice B_m n'est pas diagonalisable ? Dans ces cas expliciter la forme de Jordan de B_m (sans calculer une base de Jordan). Pour quels $m \in \mathbb{R}$ la matrice B_m est-elle inversible ?

2.d. Déterminer le polynôme minimal de B_m pour tout m.

2.e. Pour $m = 0$ trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ tels que $B_0^{-1} = \alpha I_3 + \beta B_0 + \gamma B_0^2$. *Indication:* utiliser le polynôme minimal de B_0.

Barème indicatif: 10 + 10