Partiel du 31 octobre 2016
Durée: 1h30. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Montrer que A possède deux valeurs propres $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ avec $\mu < \lambda$.

1.b. Déterminer les espaces propres E_μ et E_λ de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

1.c. La matrice A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Quel est le polynôme minimal de A ? Déterminer les sous-espaces caractéristiques V_μ et V_λ de A.

1.d. Indiquer une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ se décompose en blocs de Jordan. Calculer P^{-1}.

1.e. Trouver une matrice diagonalisable $D \in M_3(\mathbb{R})$ et une matrice nilpotente $N \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $A = D + N$ et $DN = ND$. Ces matrices sont-elles uniquement déterminées par A ? Justifier votre réponse.

2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & -4 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ -8 & 10 & -10 & 7 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

2.a. Déterminer polynôme caractéristique et espaces propres de B.

2.b. La matrice B est-elle diagonalisable, trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Quels sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques de B ?

2.c. Indiquer une matrice inversible $Q \in Gl_4(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}BQ$ se décompose en blocs de Jordan.

2.d. Exprimer les puissances B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de Q. La formule est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

2.e. Quel est le polynôme minimal de B ? Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $B^{-1} = \alpha B + \beta B^2$.

BARÊME INDICATIF: 10 + 10