Examen du 24 juin 2019
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. On pose $A(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b \\ ab & b^2 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a,b)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4+(a^2+1)b^2 = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a,b)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2+b^2-1) = 0$.

1.b. Montrer que la matrice $A(a,b)$ est orthogonale si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$. En déduire que $R = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est une matrice orthogonale.

1.c. Montrer que la droite $D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique espace propre de R.

Donner l'équation du sous-espace orthogonal $D^\perp$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $v \in D^\perp$ alors $R(v) \in D^\perp$ (i.e. $D^\perp$ est stable sous R).

1.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$.

Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2. On considère la matrice $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.a. Calculer le polynôme caractéristique de A_m. Quelles sont les deux valeurs propres de A_m et leurs multiplicités ? Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre simple ne dépend pas du paramètre m.

2.b. Montrer que la matrice A_m est diagonalisable si et seulement si $m = 0$. Déterminer les polynômes minimaux de A_0 et de A_m pour $m \neq 0$.

2.c. Trouver une matrice inversible $Q \in Gl_3(\mathbb{R})$ et une matrice de Jordan $J \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A_1 = QJQ^{-1}$.

2.d. Trouver deux matrices $S, N \in M_3(\mathbb{R})$ de sorte que S soit diagonalisable, N soit nilpotente, $SN = NS$ et $S + N = A_1$.

3. On considère $M_n(\mathbb{R})$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On admet que $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle s'écrit de manière unique $A = OS$ comme produit d'une matrice orthogonale O et d'une matrice symétrique S ayant des valeurs propres positives ou nulles.

C'est la décomposition polaire de A.

3.a. Que dit la décomposition polaire de $A \in M_n(\mathbb{R})$ dans le cas $n = 1$?

3.b. Montrer que pour deux nombres réels positifs α_1, α_2 on a l'inégalité $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \leq \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. On admettra dans la suite qu'on a en général pour n nombres réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, l'inégalité $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}$.

3.c. Montrer que si $A = OS$ est la décomposition polaire de A, alors $\|A\|^2 = \|S\|^2$ et $\det(A^2) = \det(S^2)$.

3.d. En utilisant **3.b** et le fait que S est diagonalisable dans une base orthonormée, établir l'inégalité $(\det(S^2))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\|S\|^2$.

3.e. Déduire de ce qui précède que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie l'inégalité $\sqrt{n}|\det(A)|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

Barême indicatif:
(1+1+2+2)+(2+2+2+2)+(0.5+1+1.5+1.5+1.5)=20pts