Examen du 11 juin 2018
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. On pose $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si ${}^tAA = I_3$. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard.

1.a. Rappeler pourquoi une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonne forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. En déduire que R est une matrice orthogonale.

1.b. Calculer le poynôme caractéristique de R. En déduire que R n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

1.c. Montrer que la droite $D = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique espace propre de R.

Donner l'équation du sous-espace orthogonal $D^\perp$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $v \in D^\perp$ alors $R(v) \in D^\perp$ (i.e. $D^\perp$ est stable sous R).

1.d. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée de $D^\perp$. Expliciter la matrice de la restriction $R : D^\perp \to D^\perp$ dans cette base orthonormée. En déduire la nature géométrique de la transformation $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

On pose $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.e. Montrer que le premier vecteur-colonne de $A(a, b, c)$ est de norme 1 si et seulement si $a^4 + (a^2 + 1)(b^2 + c^2) = 1$. Montrer que les deux premiers vecteurs-colonne de $A(a, b, c)$ sont orthogonaux si et seulement si $ab(a^2 + b^2 - 1) = 0$.

1.f. Montrer que $A(a, b, 0)$ est orthogonale si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$. Retrouver la conclusion de **1.a** en montrant que $R = A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

1.g. Montrer que si $A(a, b, c)$ est orthogonale et $ab \neq 0$ alors $c = 0$.

2. On considère la matrice $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 + m & 1 + m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.a. Calculer le polynôme caractéristique de A_m. Quelles sont les deux valeurs propres de A_m et leurs multiplicités ? Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre simple ne dépend pas du paramètre m.

2.b. Montrer que la matrice A_m est diagonalisable si et seulement si $m = 0$. Déterminer les polynômes minimaux de A_0 et de A_m pour $m \neq 0$.

2.c. Trouver une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A_0 = PDP^{-1}$.

2.d. Trouver une matrice inversible $Q \in Gl_3(\mathbb{R})$ et une matrice de Jordan $J \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A_1 = QJQ^{-1}$.

2.e. Trouver deux matrices $S, N \in M_3(\mathbb{R})$ de sorte que S soit diagonalisable, N soit nilpotente, $SN = NS$ et $S + N = A_1$.

Barême indicatif: (1+2+2+2+1+1+1) + (2+2+2+2+2) = 20 pts