Université Nice-Sophia Antipolis — Année 2018/2019

L3 MA/M/MI — Semestre 1

Examen d'Algèbre et Géométrie

Lundi 17 décembre 2018, durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 On se place dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle)$ où $\langle -,- \rangle$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$. On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ et la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } D = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(D) = D$. Montrer que pour tous $v, w \in \mathbb{R}^3$ on a $\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle$. En déduire que $A(D^\perp) = D^\perp$ où $D^\perp$ désigne l'orthogonal de D dans $(\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle)$.
2. Expliciter une base orthonormée B_1 de D et une base orthonormée B_2 de $D^\perp$. En déduire que $B = B_1 \cup B_2$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle)$.
3. Expliciter la matrice R de l'endomorphisme $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base B obtenue ci-dessus. En déduire la nature géométrique de cet endomorphisme.
4. Expliciter une matrice orthogonale $O \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $A = ORO^{-1}$.

Exercice 2 On se place dans l'espace hermitien $(\mathbb{C}^3, \langle -,- \rangle)$ où $\langle -,- \rangle$ désigne le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}^3$. On considère la matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ définie par

$$H = \begin{pmatrix} 2 & i & i \\ -i & 2 & 1 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de H. Pourquoi sont-elles réelles ? Quelles sont les dimensions des espaces propres associés ? Expliciter une base pour chaque espace propre de H.
2. Expliciter une base orthonormée de $(\mathbb{C}^3, \langle -,- \rangle)$ formée par des vecteurs propres de H. En déduire une matrice unitaire $U \in U_3(\mathbb{C})$ telle que $U^{-1}HU$ soit diagonale.
3. On considère la forme quadratique $q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ définie par $q(v) = {}^t vH\bar{v}$. Exprimer $q(v)$ en fonction des coordonnées de $v \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $q(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in \mathbb{C}^3$.
4. Déterminer la signature de la forme quadratique q. Que peut-on en déduire sur les vecteurs $v \in \mathbb{C}^3$ tels que $q(v) = 0$?

Exercice 3 On considère la matrice

$$C_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1+m \\ 1-m & m & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de C_m. *Indication :* on trouvera une racine $m + 2$.
2. Montrer que si $m \neq -1$ alors C_m est diagonalisable.
3. Montrer que C_{-1} n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
4. Expliciter une matrice $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}C_{-1}P$ soit sous forme de Jordan.

Barème indicatif : (2+2+2+1)+(2+2+2+1)+(2+1+1+2)