Examen du 16 décembre 2016
Durée: 2h00. Tous documents interdits.

1. On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $a,b,c \in \mathbb{C}$, et $J = A(0,1,0)$.

1.a. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice J. En déduire que J n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Calculer J^2 et J^3. En déduire le polynôme minimal de la matrice J. Conclure que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

1.b. On note $j = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Calculer $1 + j + j^2$. En déduire les valeurs et espaces propres complexes de la matrice J. Quelles sont les valeurs et espaces propres complexes de la matrice J^2 ?

1.c. Exprimer la matrice $A(a,b,c)$ comme combinaison linéaire complexe des matrices I_3, J et J^2. En déduire une base vectorielle de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle toutes les matrices $A(a,b,c)$ se diagonalisent simultanément.

1.d. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$? Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ de deux manières différentes: en vous servant de ses valeurs propres, et en vous servant uniquement de ses coefficients a,b,c. En déduire une formule pour $a^3 + b^3 + c^3$ qui fait intervenir j.

1.e. Pour quels a,b,c la matrice $A(a,b,c)$ est-elle hermitienne ? Le cas échéant, trouver une base othonormée de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^3, <-,->)$ dans laquelle la matrice $A(a,b,c)$ se diagonalise. En déduire une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ et une matrice unitaire $U \in U_3(\mathbb{C})$ telle que $A(a,b,c) = UDU^*$. Peut-on choisir U avec un déterminant égal à 1 ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2.a. Calculer polynôme caractéristique et valeurs propres de A.

2.b. La matrice A est-elle diagonalisable, trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Quels sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques de A ?

2.c. Indiquer une matrice inversible $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ se décompose en blocs de Jordan.

2.d. Trouver des matrices diagonalisable $D \in M_3(\mathbb{R})$ et nilpotente $N \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $DN = ND$ et $A = D + N$.

2.e. Quel est le polynôme minimal de A ? Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A^{-1} = \alpha A + \beta A^2$.

Barême indicatif: (2+2+2+2+3) + (1.5+1.5+2+2+2) = 20 pts