Corrigé du Contrôle du 11 décembre 2019

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Comme la matrice A est symétrique, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1.b. Le polynôme caractéristique de A est $p_A(X) = -(X+1)^2(X-5)$ donc les valeurs propres de A sont $\lambda = -1$ (double) et $\mu = 5$ (simple).

1.c. On obtient $E_{-1} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x+y+z \right\}$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 2. Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in E_{-1}$ si et seulement s'il vérifie $2x+y+z=0$ et $y=z$, donc $x=1, y=z=-1$ convient. Après normalisation on obtient $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}$ comme deuxième vecteur d'une base orthonormée de E_{-1}.

1.d. On obtient

$$E_5 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de E_5 est donnée par le vecteur $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme A est symétrique, ses espaces propres sont orthogonaux et la réunion de leurs bases orthonormées (cf. **1.c** et **1.d**) est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$.

1.e. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in Gl_3(\mathbb{R})$.

La formule de changment de base donne $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$

Comme les vecteurs-colonne de P forment une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ on obtient ${}^tPP = I_3$, donc ${}^tP = P^{-1}$ et $P \in O_3(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.

1.f. Comme A est symétrique, ses espaces propres sont orthogonaux, i.e. $(E_{-1})^\perp \subset E_5$ et $(E_5)^\perp \subset E_{-1}$. Comme les dimensions de ces espaces propres sont complémentaires on a des égalités. Une preuve alternative consiste à observer que $(E_5)^\perp$ est constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à $(2,1,1)$, i.e. des (x,y,z) tels que $2x+y+z=0$. Ces derniers constituent précisément E_{-1}. Il s'en suit qu'on a également $(E_{-1})^\perp = ((E_5)^\perp)^\perp = E_5$.

1.g. On a $\langle Av, v\rangle = {}^t v {}^t(PDP^{-1})v = {}^t v {}^t(P^{-1}) {}^t D\, {}^t P v = {}^t w D w$ pour $w = {}^t P v = P^{-1} v$. Or, pour $w = (1, 1, \sqrt{\frac{2}{5}})$, on obtient ${}^t w D w = 0$, donc $\langle Av, v\rangle = 0$ pour $v = Pw$. Comme P est inversible et w non nul, v est également non nul.

1.h. Puisque $q(x,y,z)$ est la forme quadratique définie par la matrice symétrique A, la signature de q est $(1,2)$, car la matrice A possède une valeur propre strictement positve, et une valeur propre double strictement négative.