Corrigé du Contrôle du 10 octobre 2019

1. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.a. En rajoutant (1) la 3ème colonne à la 2ème, puis en soustrayant (2) la 2ème ligne à la 3ème, on obtient:

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1-X & 2-X \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la 2ème colonne, on obtient finalement

$$p_A(X) = (1-X)^2(2-X) = -(X-1)^2(X-2)$$

ce qui donne une valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 2, et une valeur propre $\mu = 2$ de multiplicité 1.

1.b. Les espaces propres sont:

$$E_\lambda = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_\mu = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.c. La matrice n'est pas diagonalisable car la dimension de l'espace propre E_λ est strictement inférieure à la multiplicié de λ. La matrice est trigonalisable, car $p_A(X)$ est scindé.

1.d. Les calculs donnent:

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(\lambda) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension de $E(\lambda)$ est bien 2. Cela se voit également en constatant que $E(\lambda)$ est le noyau d'une matrice 3×3 de rang 1, ou bien encore que $E(\lambda)$ est solution dans $\mathbb{R}^3$ d'une uniqe équation linéaire.